Алгебра

9

ПРОСВЕЩЕНИЕ
ИЗДАТЕЛЬСТВО

Алгебра

9 класс

Учебник
для общеобразовательных
учреждений

Рекомендовано
Министерством
образования и науки
Российской
Федерации

17-е издание

Москва
·Просвещение·
2012

УДК 373.167.1:512
ББК 22.14я72
А45

Авторы:
Ш. А. Алимов, Ю. М. Колягин, Ю. В. Сидоров, М. В. Ткачёва, Н. Е. Фёдорова, М. И. Шабунин

Учебник подготовлен под научным руководством академика *А. Н. Тихонова*

На учебник получены положительные заключения Российской академии наук (№ 10106-5215/489 от 03.10.2008) и Российской академии образования (№ 01-196/5/7д от 11.10.07)

Условные обозначения

выделение основного материала

текст, который важно знать и полезно помнить

▶ ◁ решение задачи

● ○ обоснование утверждения или вывод формулы

обязательные задачи

дополнительные задачи

трудные задачи

№ занимательные задачи

Алгебра. 9 класс : учеб. для общеобразоват. учреждений / [Ш. А. Алимов, Ю. М. Колягин, Ю. В. Сидоров и др.]. — 17-е изд. — М. : Просвещение, 2012. — 287 с. : ил. — ISBN 978-5-09-028981-8.
А45

УДК 373.167.1:512
ББК 22.14я72

ISBN 978-5-09-028981-8

I
глава

Алгебраические уравнения. Системы нелинейных уравнений

§ 1 Деление многочленов

Рассмотрим многочлены

$$5x^2 - 6x - 2, \quad -4x^3 + 2x^2 - 3x, \quad x^4 + 4.$$

Эти многочлены содержат только одну букву x, записаны в стандартном виде, и показатели степеней буквы x расположены в порядке убывания.
В таких случаях первый член многочлена называют его *старшим членом*, показатель степени буквы x в старшем члене называют *степенью многочлена*.
В рассматриваемых примерах $5x^2$ — старший член первого многочлена, $-4x^3$ — второго, x^4 — третьего; первый многочлен — многочлен второй степени, второй — многочлен третьей степени, третий — многочлен четвёртой степени. Последние члены первого и третьего многочленов не содержат x, их называют *свободными членами*. В общем случае многочлен n-й степени записывают так:

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n,$$

где $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$ — заданные числа, $a_0 \neq 0$, n — натуральное число. Здесь a_0x^n — старший член многочлена $P_n(x)$, n — его степень, a_n — свободный член.
Многочлен $P_0(x) = a_0$, где a_0 — заданное число, $a_0 \neq 0$, называют *многочленом нулевой степени*, а число 0 — *нулевым многочленом*.

1. Деление многочленов нацело

Вы знаете, что при сложении, вычитании и умножении многочленов также получается многочлен. При делении многочленов иногда также может получиться многочлен.

Задача 1 Разделить многочлен

$$8x^2 + 10x - 3$$

на многочлен $2x + 3$.

▶ Деление можно выполнить уголком, как и деление натуральных чисел. Вычисления проведём по следующей схеме:

$$\begin{array}{l r|l l}
\text{делимое} & 8x^2+10x-3 & 2x+3 & \text{делитель}\\ \cline{3-3}
 & -\;\; 8x^2+12x & 4x-1 & \text{частное}\\ \cline{2-2}
\text{первый остаток} & -2x-3 & & \\
 & -\;\; -2x-3 & & \\ \cline{2-2}
 & 0 & \text{остаток} &
\end{array}$$

Остаток равен нулю, поэтому многочлен

$$8x^2 + 10x - 3$$

делится на многочлен $2x + 3$, т. е. в результате деления многочленов также получился многочлен:

$$(8x^2 + 10x - 3) : (2x + 3) = \frac{8x^2 + 10x - 3}{2x + 3} = 4x - 1.$$

Ответ $4x - 1$. ◁

На примере этой задачи поясним схему (алгоритм) деления многочленов уголком (когда степень делимого больше степени делителя).

Алгоритм деления многочленов уголком

1) Первое слагаемое частного получается делением старшего члена делимого на старший член делителя (в задаче 1 получилось $8x^2 : 2x = 4x$).

2) Найденное первое слагаемое частного умножается на делитель (в задаче 1 получилось $(4x)(2x+3) = 8x^2 + 12x$), произведение записывается под делимым и вычитается столбиком из делимого, в результате получается первый остаток (в задаче 1 первый остаток равен $-2x - 3$).

3) Первый остаток делится на делитель так же, как и в пп. 1), 2); второе слагаемое частного получается делением старшего члена первого остатка на старший член делителя (в задаче 1 получилось $(-2x):(2x)=-1$), найденное второе слагаемое умножается на делитель (в задаче 1 получилось $(-1)(2x+3)=-2x-3$), произведение записывается под первым остатком и вычитается из него столбиком, в результате получается второй остаток.
Затем второй остаток делится на делитель и т. д. Этот процесс продолжается до тех пор, пока степень очередного остатка не окажется меньше степени делителя (см. далее задачи 5, 6).

Задача 2 Найти частное от деления многочлена x^4+2 на многочлен x^2+2x+2.

▶ Выполним деление уголком (проверьте устно):

$$\begin{array}{r|l}
x^4+4 \qquad\qquad & x^2+2x+2 \\
-\underline{x^4+2x^3+2x^2} \qquad & \overline{x^2-2x+2} \\
-2x^3-2x^2+4 \quad & \\
-\underline{-2x^3-4x^2-4x} \quad & \\
2x^2+4x+4 & \\
-\underline{2x^2+4x+4} & \\
0 &
\end{array}$$

Ответ x^2-2x+2. ◁

Как и при делении чисел, результат деления многочленов можно проверить умножением. Проверьте результат деления многочленов в задачах 1, 2, т. е. покажите, что верны равенства

$$8x^2+10x-3=(4x-1)(2x+3),$$
$$x^4+4=(x^2-2x+2)(x^2+2x+2).$$

Вообще, если многочлен $P_n(x)$ степени $n \geqslant 1$ делится на ненулевой многочлен $Q_k(x)$ и в результате деления получается многочлен $M_m(x)$, то справедливо равенство

$$P_n(x)=M_m(x)\,Q_k(x). \qquad (1)$$

Это равенство называют *формулой деления* многочлена $P_n(x)$ на многочлен $Q_k(x)$, а многочлен

$M_m(x)$ — *частным* от деления $P_n(x)$ на $Q_k(x)$. Отметим, что в формуле (1) обязательно выполняется равенство

$$n = m + k, \tag{2}$$

так как при умножении двух многочленов степеней m и k получается многочлен степени $m + k$.

Задача 3 Выяснить, при каком значении a многочлен $P_4(x) = 2x^4 + 3x^3 - 5x^2 - 6x + a$ делится нацело на многочлен $Q_2(x) = 2x^2 + 3x - 1$.

▶ Выполним деление уголком:

$$\begin{array}{r|l}
-\,2x^4+3x^3-5x^2-6x+a & 2x^2+3x-1 \\
\underline{2x^4+3x^3-x^2} & \overline{x^2-2} \\
-\,-4x^2-6x+a & \\
\underline{-4x^2-6x+2} & \\
a-2 &
\end{array}$$

Ответ Остаток должен равняться нулю, поэтому $a = 2$. ◁

Задача 4 Найти такой многочлен $Q_2(x)$, чтобы многочлен $P_5(x) = x^5 + 2x^3 - x^2 - 2$ делился нацело на $Q_2(x)$ и частное от деления равнялось $M_3(x) = x^3 - 1$.

▶ По формуле деления должно выполняться равенство $P_5(x) = M_3(x)\,Q_2(x)$. Задача свелась к нахождению делителя по известным делимому и частному. Поэтому $Q_2(x) = P_5(x) : M_3(x)$. Выполним деление уголком:

$$\begin{array}{r|l}
-\,x^5+2x^3-x^2-2 & x^3-1 \\
\underline{x^5-x^2} & \overline{x^2+2} \\
-\,2x^3-2 & \\
\underline{2x^3-2} & \\
0 &
\end{array}$$

Ответ $Q_2(x) = x^2 + 2$. ◁

2. Деление многочленов с остатком

Теперь покажем, как выполняется деление многочленов в случаях, когда многочлены не делятся нацело.

Задача 5 Разделить многочлен $P_3(x) = x^3 - x^2 - 2x + 4$ на многочлен $Q_2(x) = x^2 - 3x + 1$.

Выполним деление уголком:

$$\begin{array}{r|l} -\begin{array}{l} x^3 - x^2 - 2x + 4 \\ x^3 - 3x^2 + x \end{array} & \begin{array}{l} x^2 - 3x + 1 \\ \hline x + 2 \end{array} \\ \hline -\begin{array}{r} 2x^2 - 3x + 4 \\ 2x^2 - 6x + 2 \end{array} & \\ \hline 3x + 2 & \end{array}$$

Дальнейшее деление невозможно, так как степень последнего остатка 1 меньше степени делителя 2.

Ответ Частное $x + 2$, остаток $3x + 2$. ◁

В этой задаче в результате деления получилось

$$\frac{x^3 - x^2 - 2x + 4}{x^2 - 3x + 1} = x + 2 + \frac{3x + 2}{x^2 - 3x + 1}. \qquad (3)$$

В равенстве (3) обозначим $M_1(x) = x + 2$ — неполное частное (кратко: частное), $R_1(x) = 3x + 2$ — остаток и используем обозначения условия задачи. Тогда равенство (3) примет вид:

$$\frac{P_3(x)}{Q_2(x)} = M_1(x) + \frac{R_1(x)}{Q_2(x)},$$

откуда

$$P_3(x) = M_1(x)\, Q_2(x) + R_1(x).$$

В общем случае формула деления многочлена $P_n(x)$ степени $n \geqslant 1$ на многочлен $Q_k(x)$ степени $k \geqslant 1$, $k \leqslant n$ такова:

$$P_n(x) = M_m(x)\, Q_k(x) + R_l(x), \qquad (4)$$

где степень частного $m = n - k$, степень остатка $l < k$.

Задача 6 Разделить многочлен $P_4(x) = x^4 - x^3 + 3x^2 - 2x$ на многочлен $Q_2(x) = x^2 - x + 1$ и результат проверить умножением.

Разделить многочлен на многочлен — это значит, выполнив деление, найти частное и остаток. Выполним деление:

$$\begin{array}{r|l} -\begin{array}{l} x^4 - x^3 + 3x^2 - 2x \\ x^4 - x^3 + x^2 \end{array} & \begin{array}{l} x^2 - x + 1 \\ \hline x^2 + 2 \end{array} \\ \hline -\begin{array}{r} 2x^2 - 2x \\ 2x^2 - 2x + 2 \end{array} & \\ \hline -2 & \end{array}$$

Ответ Частное равно $M_2(x) = x^2 + 2$, остаток равен $R_0(x) = -2$.

Проверить результат деления умножением — это значит показать, что справедлива формула деления (4). Проверяем:
$M_2(x)\,Q_2(x) + R_0(x) = (x^2 + 2)(x^2 - x + 1) - 2 = x^4 - x^3 + x^2 + 2x^2 - 2x + 2 - 2 = x^4 - x^3 + 3x^2 - 2x = P_4(x)$. ◁

Задача 7 Найти такой многочлен $Q_2(x)$, чтобы при делении многочлена $P_3(x) = 3x^3 + x^2 - 3$ на $Q_2(x)$ частное было равно $M_1(x) = 3x + 1$ и остаток был равен $R_1(x) = 9x$.

▶ По формуле деления (4) должно выполняться равенство

$$P_3(x) = M_1(x)\,Q_2(x) + R_1(x).$$

Задача свелась к нахождению делителя по известным делимому, частному и остатку. Поэтому $3x^3 + x^2 - 3 = (3x + 1)\,Q_2(x) + 9x$, откуда

$$(3x + 1)\,Q_2(x) = 3x^3 + x^2 - 9x - 3,$$
$$Q_2(x) = (3x^3 + x^2 - 9x - 3) : (3x + 1).$$

Выполним деление:

$$\begin{array}{r|l} -\;3x^3+x^2-9x-3 & 3x+1 \\ \underline{3x^3+x^2\qquad\qquad} & \overline{x^2-3} \\ -\;-9x-3 & \\ \underline{-9x-3} & \\ 0 & \end{array}$$

Ответ $Q_2(x) = x^2 - 3$. ◁

Проверьте результат решения этой задачи, выполнив деление заданного многочлена

$$P_3(x) = 3x^3 + x^2 - 3$$

на найденный многочлен $Q_2(x) = x^2 - 3$.

Упражнения

1 Найти частное (результат проверить умножением):
1) $(x^2 - 2x - 35) : (x - 7)$;
2) $(-4x^2 - x + 5) : (4x + 5)$;
3) $(6x^2 + 7x - 3) : (2x + 3)$;
4) $(6x^3 + 7x^2 - 6x + 1) : (3x - 1)$;
5) $(6x^3 + 11x^2 - 1) : (2x^2 + 3x - 1)$;
6) $(15x^3 - x^2 + 8x - 4) : (3x^2 + x + 2)$.

2 Выполнить деление:

1) $(6x^4 + x^3 - 6x^2 + 1) : (2x^2 + x - 1)$;
2) $(9x^4 - 7x^2 + 6x - 2) : (3x^2 - 2x + 1)$;
3) $(15x^5 + 6x^4 - 20x^2 - 8x) : (3x^3 - 4)$;
4) $(12x^5 - 9x^4 + 8x^2 - 6x) : (4x^2 - 3x)$.

3 Написать формулу деления многочлена $P(x)$ на многочлен $Q(x)$:

1) $P(x) = x^2 + 3x + 4, \quad Q(x) = x - 2$;
2) $P(x) = 4x^2 - x - 1, \quad Q(x) = x + 3$;
3) $P(x) = 6x^3 + 3x^2 - 4x + 3, \quad Q(x) = 2x + 1$;
4) $P(x) = 2x^3 - 3x^2 + 2x - 2, \quad Q(x) = x^2 + 2$.

4 Найти частное $M(x)$ и остаток $R(x)$ от деления многочлена $P(x)$ на многочлен $Q(x)$:

1) $P(x) = 3x^3 + 4x^2, \quad Q(x) = 3x + 2$;
2) $P(x) = x^3 - 3x^2, \quad Q(x) = 2x^2 + 5$;
3) $P(x) = 3x^4 + 6x^3 - 2x^2 - x + 7, \quad Q(x) = x^3 + 2x^2 - 4x$;
4) $P(x) = 2x^4 + 3x^3 - x, \quad Q(x) = x^2 + x + 1$.

5 Выполнить деление:

1) $(x^5 + 1) : (x + 1)$;
2) $(x^6 - 1) : (x - 1)$;
3) $(3x^5 - 10x^3 - 7) : (3x^2 + 2)$;
4) $(6x^6 + x^4 + x) : (2x^4 - 3x^2)$.

6 Выяснить, делится ли нацело многочлен $P(x)$ на многочлен $Q(x)$:

1) $P(x) = 8x^5 + 2x^4 - 10x^3 - 15x^2, \quad Q(x) = 4x^2 - 5$;
2) $P(x) = 3x^5 + x^4 - 6x^3 + 7x, \quad Q(x) = 3x^2 + x$;
3) $P(x) = x^6 - 4x^4 + 6x, \quad Q(x) = x^2 - 2x$;
4) $P(x) = x^6 - 3x^4 - x^3 + 2x^2 + x, \quad Q(x) = x^3 + 2x^2 + x$.

7 Выяснить, при каком значении a многочлен $P(x)$ делится нацело на многочлен $Q(x)$:

1) $P(x) = 5x^3 - 9x^2 + 13x + a, \quad Q(x) = 5x + 1$;
2) $P(x) = 7x^3 - 22x^2 + ax - 1, \quad Q(x) = x^2 - 3x + 1$;
3) $P(x) = 2x^4 + 8x^3 - 5x^2 - 4ax + a, \quad Q(x) = x^2 + 4x - 1$;
4) $P(x) = 3x^5 - 3x^4 + ax^2 - ax, \quad Q(x) = 3x^3 + 2$.

8 Найти такой многочлен $Q(x)$, чтобы многочлен $P(x)$ делился нацело на $Q(x)$ и частное от деления равнялось $M(x)$:

1) $P(x) = 4x^3 - 5x^2 + 6x + 9, \quad M(x) = x^2 - 2x + 3$;
2) $P(x) = 12x^4 + 9x^3 - 8x^2 - 6x, \quad M(x) = 3x^2 - 2$;
3) $P(x) = 2x^5 + 3x^3 - 2x, \quad M(x) = x^2 + 2$;
4) $P(x) = 3x^6 + 6x^4 - x^2 - 2, \quad M(x) = 3x^4 - 1$.

Найти такой многочлен $Q(x)$, чтобы при делении многочлена $P(x)$ на $Q(x)$ частное было равно $M(x)$ и остаток был равен $R(x)$:

1) $P(x) = x^2 - 5x + 6$, $M(x) = x - 9$, $R(x) = 42$;
2) $P(x) = 2x^3 - 3x + 5$, $M(x) = 2x - 4$, $R(x) = 5x + 5$;
3) $P(x) = 2x^5 + 4x^4 - 5x^3 - 9x^2 + 3$, $M(x) = 2x^2 - 5$, $R(x) = x^2 + 3$;
4) $P(x) = 15x^6 - 5x^4 + 6x^3 - 1$, $M(x) = 5x^3 + 2$, $R(x) = 2x - 1$.

§ 2 Решение алгебраических уравнений

Рассмотрим пример *алгебраического уравнения*, которое можно решить с помощью деления многочленов.

Задача 1 Решить уравнение

$$x^3 - 7x + 6 = 0. \qquad (1)$$

► Можно догадаться, что число $x_1 = 1$ является корнем этого уравнения, так как $1 - 7 + 6 = 0$. Покажем, как можно найти остальные корни. Левую часть уравнения (1) обозначим $P_3(x)$ и запишем формулу деления многочлена $P_3(x)$ на $(x - x_1)$, т. е. на $(x - 1)$:

$$P_3(x) = M_2(x)(x - 1) + R_0,$$

где $M_2(x)$ — многочлен второй степени, R_0 — число. Так как $P_3(1) = 0$, то из этой формулы получается, что $R_0 = 0$, т. е. многочлен $P_3(x)$ делится нацело на $(x - 1)$. Для нахождения $M_2(x)$ разделим $P_3(x)$ на $(x - 1)$:

$$\begin{array}{r|l}
x^3 - 7x + 6 & x - 1 \\
\underline{x^3 - x^2} & \overline{x^2 + x - 6} \\
x^2 - 7x + 6 & \\
\underline{x^2 - x} & \\
-6x + 6 & \\
\underline{-6x + 6} & \\
0 &
\end{array}$$

Следовательно, левую часть уравнения (1) можно разложить на множители:

$$(x^2 + x - 6)(x - 1) = 0.$$

Решая уравнение $x^2 + x - 6 = 0$, находим $x_2 = 2$, $x_3 = -3$.

Ответ $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = -3$. ◁

Уравнение (1) называют алгебраическим уравнением *третьей степени* или *кубическим* уравнением.

Алгебраическим уравнением степени n называется уравнение

$$P_n(x) = 0, \qquad (2)$$

где $P_n(x)$ — многочлен степени $n \geqslant 1$.

Каждый корень уравнения (2) называют также нулём (или корнем) многочлена $P_n(x)$.

Так же как и в задаче 1, доказывается, что если x_1 — корень уравнения (2), то многочлен $P_n(x)$ делится на $(x - x_1)$, т. е. уравнение (2) можно записать так:

$$M_{n-1}(x)(x - x_1) = 0,$$

где многочлен $M_{n-1}(x)$ степени $n - 1$ является частным от деления многочлена $P_n(x)$ на $(x - x_1)$.

Таким образом, решение уравнения (2) степени n сводится к решению уравнения $M_{n-1}(x) = 0$ степени $n - 1$.

Этот процесс можно продолжить: если $n \geqslant 2$ и известен корень x_2 уравнения $M_{n-1}(x) = 0$, то $M_{n-1}(x) = M_{n-2}(x)(x - x_2)$, и уравнение (2) можно записать так:

$$M_{n-2}(x)(x - x_1)(x - x_2) = 0,$$

где $M_{n-2}(x)$ — многочлен степени $n - 2$, т. е. решение уравнения (2) степени n сводится к решению уравнения $M_{n-2}(x) = 0$ степени $n - 2$ и т. д.

Задача 2 Решить уравнение

$$x^4 + 3x^3 - 13x^2 - 9x + 30 = 0. \qquad (3)$$

▶ 1) Можно убедиться в том, что $x_1 = 2$ — корень уравнения (3), а как он обнаружен, будет рассказано чуть позже.

2) Разделив многочлен $P_4(x)$, стоящий в левой части уравнения (3), на $(x - 2)$, получаем $P_4(x) = M_3(x)(x - 2)$, где

$$M_3(x) = x^3 + 5x^2 - 3x - 15.$$

Поэтому уравнение (3) запишется так:

$$(x^3 + 5x^2 - 3x - 15)(x - 2) = 0.$$

Задача о решении уравнения (3) четвёртой степени свелась к решению уравнения третьей степени:

$$x^3 + 5x^2 - 3x - 15 = 0. \qquad (4)$$

3) Подставляя $x_2 = -5$ в уравнение (4), убеждаемся, что это число — корень уравнения (4).
4) Разделив многочлен $M_3(x)$ на $(x + 5)$, получим $M_3(x) = (x^2 - 3)(x + 5)$.
В результате исходное уравнение (3) запишется так:

$$(x^2 - 3)(x + 5)(x - 2) = 0.$$

Решая уравнение $x^2 - 3 = 0$, находим $x_{3,\,4} = \pm\sqrt{3}$.

Ответ $x_1 = 2$, $x_2 = -5$, $x_{3,\,4} = \pm\sqrt{3}$. ◁

В задачах 1, 2 показано, как важно уметь находить хотя бы один корень алгебраического уравнения.

Теорема 1. Если уравнение

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0 \qquad (5)$$

с целыми коэффициентами $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$, где $a_n \neq 0$, имеет целый корень, то этот корень является делителем числа a_n (свободного члена уравнения (5)).

● Пусть $x = m$ — целый корень уравнения (5), т. е.

$$a_0m^n + a_1m^{n-1} + \ldots + a_{n-1}m + a_n = 0.$$

Из этого равенства следует, что $m \neq 0$, так как $a_n \neq 0$. Разделив это уравнение на $m \neq 0$, получаем $a_0m^{n-1} + a_1m^{n-2} + \ldots + a_{n-1} + \dfrac{a_n}{m} = 0$, откуда

$$\frac{a_n}{m} = -a_0m^{n-1} - a_1m^{n-2} - \ldots - a_{n-1}.$$

Правая часть этого равенства — целое число, так как по условию $m, a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ — целые числа. Следовательно, $\dfrac{a_n}{m}$ — целое число, т. е. число a_n нацело делится на m. ○
Итак, целые корни алгебраического уравнения с целыми коэффициентами (если такие есть) нужно искать только среди делителей свободного чле-

на этого уравнения. Именно так в задаче 2 были обнаружены корень уравнения (3) ($x_1 = 2$ — делитель числа 30) и корень уравнения (4) ($x_2 = -5$ — делитель числа -15).

Задача 3 Решить уравнение

$$4x^5 + 4x^4 - 13x^3 - 6x^2 + 9x + 2 = 0. \qquad (6)$$

▶ Обозначим $P_5(x)$ — многочлен, стоящий в левой части уравнения (6). Найдём все целые корни уравнения (6). Делителями числа 2 являются числа $1, -1, 2, -2$. Проверяем: $P_5(1) = 0$, $P_5(-1) = 0$, $P_5(2) = 84 \neq 0$, $P_5(-2) = 0$. Поэтому

$$P_5(x) = (x - 1)(x + 1)(x + 2)M_2(x).$$

Делением многочлена $P_5(x)$ на многочлен $(x - 1)(x + 1)(x + 2) = x^3 + 2x^2 - x - 2$ находим

$$M_2(x) = 4x^2 - 4x - 1.$$

Корнями этого многочлена являются числа $\frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{2})$. Итак, исходное уравнение (6) имеет пять действительных корней.

Ответ $x_{1,2} = \pm 1$, $x_3 = -2$, $x_{4,5} = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{2})$. ◁

Задача 4 Разложить на множители многочлен

$$P_4(x) = x^4 + 3x^3 - 5x^2 - 13x + 6. \qquad (7)$$

▶ 1) Найдём целый корень многочлена (7), если такой есть. Выпишем все делители числа 6:

$$1, -1, 2, -2, 3, -3, 6, -6.$$

Проверяем по порядку: $P_4(1) = -8$, $x = 1$ не является корнем; $P_4(-1) = 12$, $x = -1$ не является корнем; $P_4(2) = 0$, $x = 2$ — корень многочлена (7). Можно было продолжить проверку остальных делителей свободного члена многочлена (7). Однако проще, найдя первый корень $x_1 = 2$, понизить степень этого многочлена и остальные целые корни находить по свободному члену многочлена — частного. Разделив $P_4(x)$ на $(x - 2)$ уголком, получим

$$P_4(x) = (x - 2)M_3(x),$$
$$\text{где } M_3(x) = x^3 + 5x^2 + 5x - 3. \qquad (8)$$

2) Найдём теперь целый корень многочлена $M_3(x)$, если такой есть. Делителями числа -3 являются числа $1, -1, 3, -3$. Числа 1 и -1 не являются корнями многочлена $M_3(x)$, так как уже

установлено, что они не являются корнями многочлена $P_4(x)$. Проверяем числа 3 и –3:
$M_3(3) = 84$, $x = 3$ не является корнем; $M_3(-3) = 0$, $x = -3$ — корень многочлена $M_3(x)$. Разделив $M_3(x)$ на $(x + 3)$, получаем $M_3(x) = (x + 3)(x^2 + 2x - 1)$, поэтому

$$P_4(x) = (x - 2)(x + 3)(x^2 + 2x - 1).$$

3) Квадратный трёхчлен вы умеете раскладывать на множители. Решая уравнение $x^2 + 2x - 1 = 0$, находим его корни $x = -1 \pm \sqrt{2}$. Поэтому

$$x^2 + 2x - 1 = (x + 1 - \sqrt{2})(x + 1 + \sqrt{2}).$$

Ответ $P_4(x) = (x - 2)(x + 3)(x + 1 - \sqrt{2})(x + 1 + \sqrt{2})$. ◁

Задача 5 Сократить дробь $\dfrac{x^3 - x^2 - 4}{x^3 + 2x^2 + 3x + 2}$.

▶ Разложим на множители числитель и знаменатель дроби.
Перебирая делители числа –4, находим целый корень числителя $x = 2$. Разделив числитель на $(x - 2)$, получим

$$x^3 - x^2 - 4 = (x - 2)(x^2 + x + 2).$$

Перебирая делители числа 2, находим целый корень знаменателя $x = -1$. Разделив знаменатель на $(x + 1)$, получим

$$x^3 + 2x^2 + 3x + 2 = (x + 1)(x^2 + x + 2).$$

Следовательно,

$$\frac{x^3 - x^2 - 4}{x^3 + 2x^2 + 3x + 2} = \frac{(x - 2)(x^2 + x + 2)}{(x + 1)(x^2 + x + 2)} = \frac{x - 2}{x + 1}. \ ◁$$

Из истории решения алгебраических уравнений

Итак, вы познакомились с простым способом решения алгебраических уравнений с помощью разложения многочленов на множители. Это можно сделать, если удастся найти некоторые корни уравнения.
Остаётся два главных вопроса: 1) всегда ли алгебраическое уравнение имеет хотя бы один корень и 2) как его находить?
Эти трудные вопросы рассматриваются в специальном разделе математики — «Высшая алгебра».

Основной теоремой высшей алгебры **является следующая теорема:**

Теорема 2. На множестве комплексных чисел любое алгебраическое уравнение имеет хотя бы один корень.

Однако практически найти хотя бы один корень алгебраического уравнения удаётся чрезвычайно редко. Более того, в общем случае нет способа нахождения хотя бы одного корня алгебраического уравнения, несмотря на то что по теореме 2 такой корень существует.

На протяжении многих веков выдающиеся математики развивали теорию решения алгебраических уравнений. Одним из первых основную теорему высшей алгебры сформулировал в 1629 г. голландский математик А. Жирар (1595—1632), но первое строгое доказательство дал лишь в 1799 г. немецкий математик К. Гаусс (1777—1855).

Долгое время оставался открытым вопрос о практическом способе нахождения корней алгебраических уравнений. Первое изложение теории решения квадратных уравнений дано в книге греческого математика Диофанта «Арифметика» в III в. По формуле корней квадратного уравнения их можно найти, выполнив действия сложения, вычитания, умножения, деления и извлечения корня над коэффициентами уравнения. В таких случаях говорят, что *уравнение разрешимо в радикалах* (знак $\sqrt{\ }$ называют радикалом). Только в XVI в. было доказано, что алгебраические уравнения 3-й и 4-й степеней также разрешимы в радикалах. Формулы корней уравнения 3-й степени (кубического) впервые опубликованы в 1545 г. итальянским математиком Дж. Кардано (1501—1576). В том же 1545 г. другим итальянским математиком Л. Феррари (1522—1565) был найден способ сведения решения уравнения 4-й степени к последовательному решению одного кубического и двух квадратных уравнений. После этого в течение почти 300 лет делались безуспешные попытки решить в радикалах уравнения более высоких степеней. Только в 1826 г. норвежский математик Н. Абель (1802—1829) доказал, что в общем случае алгебраические уравнения 5-й и всех более высоких степеней в радикалах неразрешимы.

№ 1

СКОЛЬКО РАЗ ЗА СУТКИ ЧАСОВАЯ И МИНУТНАЯ СТРЕЛКИ СОВМЕЩАЮТСЯ?

Упражнения

10 Решить уравнение:

1) $x^3 - x^2 - 8x + 6 = 0$; 2) $x^4 + x^3 - 4x^2 - 2x + 4 = 0$;
3) $6x^3 + 11x^2 - 3x - 2 = 0$; 4) $4x^4 - 8x^3 + 3x^2 + 2x - 1 = 0$.

11 Найти действительные корни уравнения:

1) $x^3 - 5x^2 + 8x - 6 = 0$;
2) $9x^3 + 12x^2 - 10x + 4 = 0$;
3) $x^4 + x^3 - 5x^2 + x - 6 = 0$;
4) $2x^4 - 2x^3 - 11x^2 - x - 6 = 0$.

12 Разложить на множители многочлен:

1) $6x^3 - 25x^2 + 3x + 4$; 2) $4x^3 + 12x^2 - 3x - 9$;
3) $4x^4 + 4x^3 - 25x^2 - x + 6$; 4) $x^4 - 2x^3 - 14x^2 - 6x + 5$.

13 Сократить дробь:

1) $\dfrac{x^3 + 2x^2 + 9}{x^3 - 2x^2 + 4x - 3}$; 2) $\dfrac{x^3 + 2x^2 + 2x + 1}{2x^3 + x^2 + 1}$;

3) $\dfrac{x^4 - 2x^3 + x - 2}{2x^4 - 3x^3 - x - 6}$; 4) $\dfrac{2x^4 - 3x^3 - 7x^2 - 5x - 3}{2x^3 - 5x^2 - 2x - 3}$.

14 Решить уравнение:

1) $x^5 - x^4 - 7x^3 + 7x^2 + 12x - 12 = 0$;
2) $2x^5 - 3x^4 - 7x^3 + 8x^2 + 6x - 4 = 0$;
3) $x^6 + x^5 - 7x^4 - 5x^3 + 16x^2 + 6x - 12 = 0$;
4) $9x^6 + 6x^5 - 17x^4 - 12x^3 + 7x^2 + 6x + 1 = 0$.

15 Уравнение $ax^3 - 2x^2 - 5x + b = 0$ имеет корни $x_1 = 1$, $x_2 = -2$. Найти a, b и третий корень этого уравнения.

16 Доказать теорему Виета для кубического уравнения: если x_1, x_2, x_3 — корни уравнения $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, то

$$x_1 + x_2 + x_3 = -a,$$
$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = b,$$
$$x_1x_2x_3 = -c.$$

17 Доказать, что если x_1, x_2, x_3 — корни уравнения $x^3 + ax + b = 0$, то $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 3x_1x_2x_3$.

§ 3 Уравнения, сводящиеся к алгебраическим

Рассмотрим несколько примеров уравнений, которые можно свести к алгебраическим уравнениям.

Задача 1 Найти действительные корни уравнения

$$(x + 1)(x^3 + 1) = 2x(1 - x^2) + 4.$$

▶ Перенесём все члены правой части уравнения в левую с противоположным знаком и упростим полученное уравнение:

$$(x + 1)(x^3 + 1) - 2x(1 - x^2) - 4 = 0,$$
$$x^4 + x^3 + x + 1 - 2x + 2x^3 - 4 = 0,$$
$$x^4 + 3x^3 - x - 3 = 0.$$

Это алгебраическое уравнение можно решить таким же способом, как решены задачи 1—3 (§ 2). Однако в данном случае это уравнение можно решить проще, разложив его левую часть на множители способом группировки:

$$x^4 + 3x^3 - x - 3 = (x^4 + 3x^3) - (x + 3) =$$
$$= x^3(x + 3) - (x + 3) = (x + 3)(x^3 - 1) =$$
$$= (x + 3)(x - 1)(x^2 + x + 1).$$

Таким образом, решение исходного уравнения свелось к решению уравнения

$$(x + 3)(x - 1)(x^2 + x + 1) = 0,$$

откуда $x_1 = -3$, $x_2 = 1$, а уравнение $x^2 + x + 1 = 0$ не имеет действительных корней.

Ответ $x_1 = -3$, $x_2 = 1$. ◁

Задача 2 Решить уравнение

$$x^4 - 2x^3 - 22x^2 - 2x + 1 = 0.$$

▶ Это уравнение является алгебраическим, но не имеет целых корней, так как делители свободного члена (числа ± 1) не являются корнями уравнения. Однако данное уравнение можно решить, заметив, что оно обладает своеобразной «симметрией»: коэффициент при x^4 равен свободному члену, а коэффициент при x^3 равен коэффициенту при x. На этом примере покажем, как можно решать такие уравнения.

Заметим, что $x = 0$ не является корнем данного уравнения. Поэтому можно разделить уравнение на x^2 без потери корней:

$$x^2 - 2x - 22 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} = 0, \text{ т. е.}$$

$$\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 2\left(x + \frac{1}{x}\right) - 22 = 0.$$

Сделаем замену неизвестного, обозначив $x + \frac{1}{x} = t$. Тогда $x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} = t^2$, откуда $x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$, и уравнение сводится к уравнению $t^2 - 2 - 2t - 22 = 0$, т. е. $t^2 - 2t - 24 = 0$, откуда $t_1 = 6$, $t_2 = -4$.

Возвращаясь к неизвестному x, нужно рассмотреть следующие два случая:

1) $x + \frac{1}{x} = 6$, откуда $x^2 - 6x + 1 = 0$,

$$x_{1,2} = 3 \pm 2\sqrt{2}.$$

2) $x + \frac{1}{x} = -4$, откуда $x^2 + 4x + 1 = 0$,

$$x_{3,4} = -2 \pm \sqrt{3}.$$

Ответ $x_{1,2} = 3 \pm 2\sqrt{2}$, $x_{3,4} = -2 \pm \sqrt{3}$. ◁

С помощью замены $x + \frac{1}{x} = t$ можно решать *возвратные* уравнения

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0,$$

$$ax^6 + bx^5 + cx^4 + dx^3 + cx^2 + bx + a = 0 \text{ и т. д.}$$

Задача 3 Решить уравнение

$$\frac{2x^2 - 1}{x - 1} - \frac{16x - 7}{x + 3} = 2. \qquad (1)$$

Пусть x — корень данного уравнения, т. е. x — такое число, что верно равенство (1). Тогда знаменатели дробей, входящих в равенство (1), не равны нулю, т. е. $x \neq 1$ и $x \neq -3$. Умножая равенство (1) (т. е. обе его части) на общий знаменатель дробей $(x-1)(x+3) \neq 0$, получаем верное равенство

$$(2x^2 - 1)(x + 3) - (16x - 7)(x - 1) = \\ = 2(x - 1)(x + 3). \qquad (2)$$

Найдём значения x, при которых верно равенство (2), т. е. решим уравнение (2). Преобразуем это уравнение:

$$2x^3 + 6x^2 - x - 3 - 16x^2 + 16x + 7x - 7 = \\ = 2x^2 + 6x - 2x - 6,$$

$$2x^3 - 12x^2 + 18x - 4 = 0,$$

$$x^3 - 6x^2 + 9x - 2 = 0. \qquad (3)$$

Решим кубическое уравнение (3) таким же способом, каким решались задачи в § 2. Среди делителей свободного члена находим целый корень $x_1 = 2$ уравнения (3). Разделив левую часть уравнения (3) на $(x - 2)$, получаем, что уравнение (3) таково:

$$(x - 2)(x^2 - 4x + 1) = 0.$$

Решая квадратное уравнение $x^2 - 4x + 1 = 0$, находим его корни $x_{2,3} = 2 \pm \sqrt{3}$.

Итак, равенство (3) является верным при найденных трёх значениях x. Так как эти значения не равны 1 и –3, то из верного равенства (3) обратными преобразованиями можно получить верное равенство (1). Однако эти сложные обратные преобразования можно не делать. Достаточно проверить, что найденные значения x в самом деле являются корнями уравнения (1). При проверке можно не выполнять все громоздкие вычисления, если есть уверенность, что при решении не допущены ошибки при преобразованиях и вычислениях, а достаточно заметить, что при найденных значениях x знаменатели дробей, входящих в уравнение (1), не равны нулю.

Ответ $x_1 = 2$, $x_{2,3} = 2 \pm \sqrt{3}$. ◁

Уравнение (1) — это пример *рационального уравнения*, так как его членами являются *рациональные алгебраические дроби*, у которых числителями и знаменателями являются многочлены.

Задача 4 Найти действительные корни рационального уравнения

$$\frac{1}{x+1}+\frac{x^3}{x+2}=\frac{2x+3}{(x+1)(x+2)}.$$

▶ Умножая это уравнение на $(x + 1)(x + 2)$, получаем $x + 2 + x^3(x + 1) = 2x + 3$, откуда

$$x^4 + x^3 - x - 1 = 0.$$

Решим это уравнение, разложив его левую часть на множители способом группировки:

$$(x^4 - 1) + (x^3 - x) = 0,$$
$$(x^2 - 1)(x^2 + 1) + x(x^2 - 1) = 0,$$
$$(x^2 - 1)(x^2 + x + 1) = 0,$$

откуда $x_{1,2} = \pm 1$, а уравнение $x^2 + x + 1 = 0$ не имеет действительных корней. При $x = 1$ знаменатели дробей, входящих в исходное уравнение, не равны нулю, поэтому $x = 1$ — корень этого уравнения. При $x = -1$ знаменатели двух дробей исходного уравнения равны нулю, поэтому $x = -1$ — посторонний корень.

Ответ $x = 1$. ◁

Итак, для решения рационального уравнения нужно:

1) умножить уравнение на общий знаменатель дробей, входящих в это уравнение;

2) свести полученное уравнение к алгебраическому и решить его;

3) проверить, при каких найденных значениях неизвестного знаменатели дробей, входящих в уравнение, не равны нулю.

При этом необязательно проводить такие подробные рассуждения, как в задаче 3, выполняя их устно (в уме), как и при решении задачи 4.

Задача 5* Решить уравнение

$$\frac{4x^3-7x}{2x+3}-\frac{2x^2+5x}{x+3}+\frac{9x+18}{2x^2+9x+9}=0. \qquad (4)$$

▶ Разложим квадратный трёхчлен $2x^2 + 9x + 9$ на множители. Решая квадратное уравнение $2x^2 + 9x + 9 = 0$, находим его корни $x = -3$ и $x = -\frac{3}{2}$. Поэтому

$$2x^2 + 9x + 9 = 2(x + 3)\left(x + \frac{3}{2}\right) = (x + 3)(2x + 3).$$

Умножим уравнение (4) на общий знаменатель дробей $(x + 3)(2x + 3)$:

$(4x^3 - 7x)(x + 3) - (2x^2 + 5x)(2x + 3) + 9x + 18 = 0,$

откуда

$$4x^4 + 12x^3 - 7x^2 - 21x - 4x^3 - 6x^2 -$$
$$- 10x^2 - 15x + 9x + 18 = 0,$$
$$4x^4 + 8x^3 - 23x^2 - 27x + 18 = 0. \qquad (5)$$

Решим это уравнение. Перебирая делители его свободного члена — числа 18, получаем, что $x = 2$ и $x = -3$ являются его корнями. Поэтому многочлен $P_4(x)$, стоящий в левой части уравнения (5), делится нацело на многочлен $(x - 2)(x + 3) = x^2 + x - 6$, т. е.

$$P_4(x) = (x^2 + x - 6)\, M_2(x).$$

Разделив $P_4(x)$ на $(x^2 + x - 6)$ уголком, получим $M_2(x) = 4x^2 + 4x - 3$. Следовательно, уравнение (5) таково:

$$(x - 2)(x + 3)(4x^2 + 4x - 3) = 0.$$

Решая квадратное уравнение $4x^2 + 4x - 3 = 0$, находим его корни $x = \frac{1}{2}$ и $x = -\frac{3}{2}$.

Итак, корнями уравнения (5) являются числа 2, -3, $\frac{1}{2}$, $-\frac{3}{2}$. Из них второй и четвёртый являются посторонними для уравнения (4), так как при $x = -3$ и при $x = -\frac{3}{2}$ хотя бы один из знаменателей дробей, входящих в уравнение (4), равен нулю.

Ответ $x_1 = 2,\ x_2 = \frac{1}{2}$. ◁

Упражнения

18 Найти действительные корни уравнения:

1) $(2x + 1)(x^3 + 1) + x^2 = 2x(x^3 + 3) - 5$;
2) $(2x^2 - 1)^2 + x(2x - 1)^2 = (x + 1)^2 + 16x^2 - 6$;
3) $x^2(x - 2)(6x + 1) + x(5x + 3) = 1$;
4) $x^2(3x + 1) - (x^2 + 1)^2 = 3$.

19 Решить возвратное уравнение:

1) $6x^4 - 35x^3 + 62x^2 - 35x + 6 = 0$;
2) $x^4 + 2x^3 - 22x^2 + 2x + 1 = 0$.

20 Решить рациональное уравнение:

1) $\frac{x^2}{x+1}-\frac{5}{x-2}=\frac{11}{(x+1)(2-x)}$;

2) $\frac{16x+9}{x+4}-\frac{1}{x}=2+2x$;

3) $\frac{3x^2}{x-1}-\frac{7}{x+1}=\frac{5x^2+9}{x^2-1}$;

4) $\frac{2x^2}{x-1}-\frac{3x}{x+2}=\frac{2(4x-1)}{x^2+x-2}$;

5) $\frac{3x}{2x-1}+\frac{x+1}{x+2}=\frac{3}{2-3x-2x^2}$;

6) $\frac{1-x}{x-3}-\frac{2x}{3x+2}=\frac{4}{6+7x-3x^2}$.

21 Доказать, что уравнение $ax^4+bx^3+cx^2-bx+a=0$, где $a\neq 0$, заменой $x-\frac{1}{x}=t$ сводится к уравнению $at^2+bt+c+2a=0$.

Решить уравнение:

1) $x^4-4x^3-2x^2+4x+1=0$;
2) $2x^4-15x^3+14x^2+15x+2=0$.

22 Найти действительные корни уравнения:

1) $\frac{x^3-9x^2}{x-1}+\frac{1}{x-2}+27=\frac{2x-3}{x^2-3x+2}$;

2) $\frac{x^3}{x-2}-\frac{3x^2-1}{x+1}=\frac{6x^2}{x^2-x-2}$;

3) $\frac{x^2}{x+2}+\frac{2x^2(x-2)}{x-3}=\frac{3x^2+19x+6}{x^2-x-6}$;

4) $\frac{2x^3}{x+2}+\frac{x^2}{x-1}=\frac{8x^2-7x+2}{x^2+x-2}$.

23 Выяснить, при каких действительных значениях a уравнение

$$\frac{x^2+2(a-1)x+a^2-a}{x-2}=0$$

имеет два действительных различных корня.

24 Выяснить, при каких действительных значениях a уравнение

$$\frac{x^3-2ax^2-a^2x+2a^3}{x+3}=0$$

имеет три различных действительных корня.

§ 4 Системы нелинейных уравнений с двумя неизвестными

В 8 классе рассматривались простейшие системы уравнений, содержащие уравнения второй степени. Продолжим рассмотрение таких систем.

Задача 1 Решить систему уравнений $\begin{cases} x^2 + y^2 = 34, \\ x - y = 2. \end{cases}$

▶ Решим эту систему способом подстановки, выразив y через x из второго уравнения системы: $y = x - 2$. Подставляя это значение y в первое уравнение, получаем $x^2 + (x - 2)^2 = 34$, откуда

$$x^2 - 2x - 15 = 0, \ x_1 = 5, \ x_2 = -3.$$

По формуле $y = x - 2$ находим $y_1 = 3$, $y_2 = -5$.

Ответ (5; 3), (–3; –5). ◁

Задача 2 Решить систему уравнений $\begin{cases} 2x - y = 3, \\ 3x^2 - 4xy + y^2 = 5. \end{cases}$

▶ Эту систему также решим способом подстановки: $y = 2x - 3$,

$$3x^2 - 4x(2x - 3) + (2x - 3)^2 = 5,$$
$$3x^2 - 8x^2 + 12x + 4x^2 - 12x + 9 = 5,$$
$$x^2 = 4, \ x_1 = 2, \ x_2 = -2.$$

По формуле $y = 2x - 3$ находим $y_1 = 1$, $y_2 = -7$.

Ответ (2; 1), (–2; –7). ◁

Задача 3 Решить систему уравнений $\begin{cases} x + y = 12, \\ xy = 35. \end{cases}$

▶ Эту систему также можно решить способом подстановки. Однако если числа x, y таковы, что их сумма равна 12, а произведение равно 35, то по теореме, обратной теореме Виета, они являются корнями уравнения $z^2 - 12z + 35 = 0$, откуда $z_1 = 7$, $z_2 = 5$.

Следовательно, решениями исходной системы являются пары чисел:

$$x_1 = 7,\ y_1 = 5 \text{ и } x_2 = 5,\ y_2 = 7.$$

Ответ (7; 5), (5; 7). ◁

Задача 4 Решить систему уравнений $\begin{cases} 3x - 4y = 2, \\ 9x^2 - 16y^2 = 20. \end{cases}$

▶ Запишем второе уравнение системы так:

$$(3x - 4y)(3x + 4y) = 20.$$

Подставляя в это уравнение значение $3x - 4y = 2$, получаем

$$2(3x + 4y) = 20, \text{ т. е. } 3x + 4y = 10.$$

Данная система свелась к системе

$$\begin{cases} 3x - 4y = 2, \\ 3x + 4y = 10, \end{cases}$$

которую решим способом сложения:

$$6x = 12,\ x = 2;\ 8y = 8,\ y = 1.$$

Ответ (2; 1). ◁

Задача 5 Решить систему уравнений $\begin{cases} x + y + 2xy = 10, \\ x + y - 2xy = -2. \end{cases}$

▶ Складывая почленно уравнения системы, получаем $2x + 2y = 8$, откуда $y = 4 - x$.
Подставляя это значение y в любое из уравнений системы, например во второе, получаем

$$x + 4 - x - 2x(4 - x) = -2, \text{ откуда}$$
$$4 - 8x + 2x^2 = -2,$$
$$2x^2 - 8x + 6 = 0,$$
$$x^2 - 4x + 3 = 0,$$
$$x_1 = 1,\ x_2 = 3.$$

По формуле $y = 4 - x$ находим $y_1 = 3$, $y_2 = 1$.

Ответ (1; 3), (3; 1). ◁

Задача 6 Решить систему уравнений $\begin{cases} x^2 + y^2 = 13, \\ xy = 6. \end{cases}$

▶ Прибавим к первому уравнению системы второе, умноженное на 2:

$$x^2 + 2xy + y^2 = 25,$$

откуда

$$(x + y)^2 = 25, \ x + y = \pm 5,$$

т. е. или $y = 5 - x$, или $y = -5 - x$.
Решение исходной системы свелось к решению двух систем уравнений:

$$\begin{cases} x + y = 5, \\ xy = 6; \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y = -5, \\ xy = 6. \end{cases}$$

Решая каждую из этих систем (используя теорему, обратную теореме Виета), находим четыре решения: $x_1 = 2$, $y_1 = 3$; $x_2 = 3$, $y_2 = 2$; $x_3 = -2$, $y_3 = -3$; $x_4 = -3$, $y_4 = -2$.

Ответ (2; 3), (3; 2), (–2; –3), (–3; –2). ◁

Задача 7 Решить систему уравнений $\begin{cases} x^2 - xy + 2y^2 = 16, \\ y^2 - 2xy - 3x^2 = 0. \end{cases}$

▶ Выразим из второго уравнения y через x, решая его как квадратное относительно y:

$$y_{1,2} = x \pm \sqrt{x^2 + 3x^2} = x \pm 2x,$$

откуда $y = 3x$ или $y = -x$.
1) Подставляя $y = 3x$ в первое уравнение данной системы, получаем

$$x^2 - 3x^2 + 18x^2 = 16,$$
$$16x^2 = 16, \ x^2 = 1, \ x_1 = 1, \ x_2 = -1,$$

откуда $y_1 = 3$, $y_2 = -3$.
2) Подставляя $y = -x$ в первое уравнение системы, получаем $4x^2 = 16$, $x^2 = 4$, $x_3 = 2$, $x_4 = -2$, откуда $y_3 = -2$, $y_4 = 2$.

Ответ (1; 3), (–1; –3), (2; –2), (–2; 2). ◁

Задача 8* При каких значениях a система $\begin{cases} x + y = a, \\ xy = -2a^2 \end{cases}$ имеет решения $(x; y)$ такие, что $-2 < x < 2$, $-2 < y < 2$?

▶ Найдём решения системы, используя теорему, обратную теореме Виета:

$$z^2 - az - 2a^2 = 0, \text{ откуда}$$
$$z_{1,2} = \frac{1}{2}(a \pm \sqrt{a^2 + 8a^2}), \ z_1 = 2a, \ z_2 = -a.$$

Поэтому решениями системы являются пары чисел: $(2a; -a)$ и $(-a; 2a)$.

По условию должны выполняться неравенства

$$-2 < 2a < 2, \quad -2 < -a < 2,$$

откуда $-1 < a < 1$, $-2 < a < 2$.

Ответ $-1 < a < 1$. ◁

Упражнения

Решить систему уравнений (25—30).

25 1) $\begin{cases} x^2+y^2=74, \\ x+y=12; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2-y^2=32, \\ x-y=4; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2+y^2=10, \\ x+y=4; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^2-y^2=16, \\ x-y=1. \end{cases}$

26 1) $\begin{cases} 2x^2-2xy+x=-9, \\ 2y-3x=1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2+6xy+8y^2=91, \\ x+3y-10=0; \end{cases}$

3) $\begin{cases} (x-1)(y-1)=2, \\ x+y=5; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} (x-2)(y+1)=1, \\ x-y=3. \end{cases}$

27 1) $\begin{cases} x+y=3, \\ xy=-40; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x-y=7, \\ xy=18; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x+y=8, \\ xy=15; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x-y=-2, \\ xy=15. \end{cases}$

28 1) $\begin{cases} 2x+3y=3, \\ 4x^2-9y^2=27; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x-y=5, \\ \sqrt{x}-\sqrt{y}=1; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2+y^2=34, \\ xy=15; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^2+y^2=25, \\ xy=12. \end{cases}$

29 1) $\begin{cases} 2x-3y=1, \\ 2x^2-xy-3y^2=3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^3+y^3=133, \\ x+y=7; \end{cases}$

3) $\begin{cases} xy-x+y=7, \\ xy+x-y=13; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} xy-2(x+y)=2, \\ xy+x+y=29. \end{cases}$

30 1) $\begin{cases} x^2+y^2=10, \\ xy=3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2-xy+y^2=19, \\ xy=15; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2+4xy+y^2=94, \\ xy=15; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^2-6xy+y^2=8, \\ xy=7. \end{cases}$

§ 5 Различные способы решения систем уравнений

Рассмотрим ещё примеры нахождения действительных решений систем уравнений.

Задача 1 Решить систему уравнений $\begin{cases} x + y = 12, \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{3}{8}. \end{cases}$

▶ Если $(x; y)$ — решение этой системы, то $x \neq 0$ и $y \neq 0$. Запишем второе уравнение системы так:

$$\frac{x + y}{xy} = \frac{3}{8}.$$

Подставляя значение $x + y = 12$ в полученное уравнение, находим $\dfrac{12}{xy} = \dfrac{3}{8}$, откуда $xy = 32$.

Решение данной системы свелось к решению системы

$$\begin{cases} x + y = 12, \\ xy = 32. \end{cases}$$

Пользуясь теоремой, обратной теореме Виета, получаем $x_1 = 4$, $y_1 = 8$; $x_2 = 8$, $y_2 = 4$.

Ответ (4; 8), (8; 4). ◁

Задача 2 Решить систему уравнений $\begin{cases} x - y^2 = 3, \\ xy^2 = 28. \end{cases}$

▶ Выразим y^2 из первого уравнения системы и подставим это выражение во второе уравнение: $y^2 = x - 3$, $x(x - 3) = 28$, $x^2 - 3x - 28 = 0$, откуда

$$x_1 = 7, \ x_2 = -4.$$

Пользуясь формулой $y^2 = x - 3$, находим значения y: если $x = 7$, то $y^2 = 7 - 3$, $y^2 = 4$, откуда $y = 2$ или $y = -2$; если $x = -4$, то $y^2 = -4 - 3 = -7 < 0$, поэтому действительных корней нет.

Ответ (7; 2), (7; –2). ◁

Эту систему уравнений можно было решить иначе.

▶ Записав систему в виде $\begin{cases} x + (-y^2) = 3, \\ x(-y^2) = -28, \end{cases}$ можно было составить по теореме, обратной теореме Виета, уравнение $z^2 - 3z - 28 = 0$; решив это уравнение, получим $z_1 = x = 7$, $z_2 = -y^2 = -4$, или $z_1 = -y^2 = 7$, $z_2 = x = -4$, откуда, естественно, получим тот же ответ. ◁

Заметим, что замена x через y из первого уравнения и подстановка найденного выражения во второе уравнение привели бы к решению биквадратного уравнения.

Задача 3 Решить систему уравнений $\begin{cases} x^3 - y^3 = 7, \\ x^2 y - xy^2 = 2. \end{cases}$

▶ По условию $x \neq 0$, $y \neq 0$, $x - y \neq 0$. Разделив первое уравнение системы на второе, получим

$$\frac{x^3 - y^3}{x^2 y - xy^2} = \frac{7}{2}, \quad \frac{(x-y)(x^2 + xy + y^2)}{xy(x-y)} = \frac{7}{2},$$
$$2(x^2 + xy + y^2) = 7xy, \quad 2x^2 - 5xy + 2y^2 = 0.$$

Рассматривая полученное уравнение как квадратное относительно x, найдём его корни:

$$x_{1,2} = \frac{5y \pm \sqrt{25y^2 - 16y^2}}{4}, \quad x_{1,2} = \frac{5y \pm 3y}{4},$$

откуда $x = 2y$ или $x = \frac{y}{2}$.

Подставив найденные выражения x через y во второе уравнение системы, получаем:

1) $4y^3 - 2y^3 = 2$, откуда $y^3 = 1$ и $y_1 = 1$;

2) $\frac{y^3}{4} - \frac{y^3}{2} = 2$, откуда $y^3 = -8$ и $y_2 = -2$.

Теперь найдём соответствующие значения x по формулам $x = 2y$ и $x = \frac{y}{2}$. Получаем $x_1 = 2$, $x_2 = -1$.

Ответ (2; 1), (–1; –2). ◁

Задача 4 Решить систему уравнений $\begin{cases} x^2 - 2xy + 4y^2 = 7, \\ x^3 + 8y^3 = 35. \end{cases}$

▶ Применяя формулу суммы кубов, запишем второе уравнение системы в виде

$$(x + 2y)(x^2 - 2xy + 4y^2) = 35.$$

Используя первое уравнение системы, находим $x + 2y = 5$.
Выразим из этого уравнения $2y$ через x и подставим найденное выражение во второе уравнение системы:

$$2y = 5 - x,\ x^3 + (5 - x)^3 = 35, \text{ откуда}$$
$$x^3 + 125 - 75x + 15x^2 - x^3 = 35,$$
$$15x^2 - 75x + 90 = 0,$$
$$x^2 - 5x + 6 = 0;\ x_1 = 3,\ x_2 = 2.$$

Теперь находим соответствующие значения y:

$$2y = 5 - 3, \text{ откуда } y_1 = 1,$$
$$2y = 5 - 2, \text{ откуда } y_2 = \frac{3}{2}.$$

Ответ $(3; 1)$, $\left(2; \dfrac{3}{2}\right)$. ◁

Задача 5 Решить систему уравнений $\begin{cases} x - y = 5, \\ \sqrt{\dfrac{x}{y}} - \sqrt{\dfrac{y}{x}} = \dfrac{5}{6}. \end{cases}$

▶ Обозначим $\sqrt{\dfrac{x}{y}} = t$, тогда $\sqrt{\dfrac{y}{x}} = \dfrac{1}{t}$. Второе уравнение системы теперь запишется так:

$$t - \frac{1}{t} = \frac{5}{6}, \quad t^2 - \frac{5}{6}t - 1 = 0,$$

откуда

$$t_{1,2} = \frac{5}{12} \pm \sqrt{\frac{25}{144} + 1} = \frac{5}{12} \pm \frac{13}{12}, \quad t_1 = \frac{3}{2},\ t_2 = -\frac{2}{3}.$$

Так как $t > 0$, то $\sqrt{\dfrac{x}{y}} = \dfrac{3}{2}$, или $\dfrac{x}{y} = \dfrac{9}{4}$, откуда $x = \dfrac{9}{4}y$.

Подставляя это выражение x в первое уравнение системы, получаем $\dfrac{9}{4}y - y = 5$, $\dfrac{5}{4}y = 5$, $y = 4$. Поэтому $x = 9$.

Так как мы возводили в квадрат заведомо положительные числа $\sqrt{\dfrac{x}{y}}$ и $\dfrac{3}{2}$, проверка не нужна.

Ответ $(9; 4)$. ◁

Задача 6* Решить систему уравнений $\begin{cases} xy = 2, \\ xz = 3, \\ x^2 + y^2 = 5. \end{cases}$

▶ Найдём сначала значения x и y, пользуясь первым и третьим уравнениями данной системы. Сложив третье уравнение с удвоенным первым, получим

$$(x + y)^2 = 9, \text{ откуда } x + y = 3 \text{ или } x + y = -3.$$

Подставляя значения $x = 3 - y$ и $x = -3 - y$ в первое уравнение системы, получаем:
1) $(3 - y)\,y = 2$, $y^2 - 3y + 2 = 0$; $y_1 = 1$, $y_2 = 2$;
2) $(-3 - y)\,y = 2$, $y^2 + 3y + 2 = 0$; $y_3 = -2$, $y_4 = -1$.
Тогда соответствующие значения x таковы:

$$x_1 = 2,\ x_2 = 1,\ x_3 = -1,\ x_4 = -2.$$

Из второго уравнения системы находим $z = \frac{3}{x}$, откуда

$$z_1 = \frac{3}{2},\ z_2 = 3,\ z_3 = -3,\ z_4 = -\frac{3}{2}.$$

Ответ $\left(2;\ 1;\ \frac{3}{2}\right)$, $(1;\ 2;\ 3)$, $(-1;\ -2;\ -3)$, $\left(-2;\ -1;\ -\frac{3}{2}\right)$. ◁

Задача 7* При каких значениях a система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + axy + y^2 = 25, \\ ax + y = 8 \end{cases}$$

имеет решение $(x;\ y)$, где $x = 1$?

▶ Если $x = 1$ входит в решение системы, то получаем следующую систему двух уравнений относительно y и a:

$$\begin{cases} 1 + ay + y^2 = 25, \\ a + y = 8. \end{cases}$$

Решая эту систему уравнений способом подстановки, получаем

$$a = 8 - y, \quad 1 + (8 - y)\,y + y^2 = 25,$$

откуда

$$1 + 80 - y^2 + y^2 = 25,\ 8y = 24,\ y = 3.$$

Поэтому $a = 8 - y$, т. е. $a = 5$.

Ответ $a = 5$. ◁

Упражнения

Решить систему уравнений (31—35).

31 1) $\begin{cases}\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=1,\\ x+y=4;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}\dfrac{x+y}{x-y}=\dfrac{3}{2},\\ xy=80;\end{cases}$

3) $\begin{cases}x-y=3,\\ \dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}=-0{,}3;\end{cases}$ 4) $\begin{cases}x+y=9,\\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=0{,}5.\end{cases}$

32 1) $\begin{cases}x^2-y=7,\\ x^2y=18;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}2x^2+y=3,\\ x^2y-1=0;\end{cases}$

3) $\begin{cases}x^2-y^2=12,\\ x^2+y^2=20;\end{cases}$ 4) $\begin{cases}x^2-y^2=21,\\ x^2+y^2=29;\end{cases}$

5) $\begin{cases}x^3+y^3=28,\\ xy^2+x^2y=12;\end{cases}$ 6) $\begin{cases}xy^2+xy^3=10,\\ x+xy=10.\end{cases}$

33 1) $\begin{cases}x^3+27y^3=54,\\ x^2-3xy+9y^2=9;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}x^2-xy+y^2=19,\\ x^2+xy+y^2=49;\end{cases}$

3) $\begin{cases}x^3-y^3=72,\\ x-y=6;\end{cases}$ 4) $\begin{cases}x^2+5xy+y^2=25,\\ 5x+y=8.\end{cases}$

34 1) $\begin{cases}x+y=41,\\ \sqrt{\dfrac{x}{y}}+\sqrt{\dfrac{y}{x}}=\dfrac{41}{20};\end{cases}$ 2) $\begin{cases}x+y=10,\\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=4;\end{cases}$

3) $\begin{cases}x+y=5,\\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=3;\end{cases}$ 4) $\begin{cases}x-y=13,\\ \sqrt{x}-\sqrt{y}=1.\end{cases}$

35 1) $\begin{cases}yz=15,\\ xz=10,\\ y^2+z^2=34;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}xz+yz=16,\\ xy+yz=15,\\ xz+xy=7.\end{cases}$

36 Решить систему уравнений относительно x и y:

1) $\begin{cases}x+y=2a,\\ xy=-3a^2;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}x-y=b,\\ xy=2b^2.\end{cases}$

§ 6 Решение задач с помощью систем уравнений

Задача 1 Если к произведению двух чисел прибавить меньшее из них, то получится 54. Если к тому же произведению прибавить большее число, то получится 56. Найти эти числа.

▶ Условие этой задачи таково, что составить нужную систему уравнений просто. Обозначив искомые числа через x и y ($x < y$), получаем по условию два уравнения, составляющие систему

$$\begin{cases} xy + x = 54, \\ xy + y = 56. \end{cases}$$

Вычитая из второго уравнения первое, получаем: $y - x = 2$, откуда $y = x + 2$. Подставляя это значение y в первое уравнение системы, имеем

$$x(x+2) + x = 54, \quad x^2 + 3x - 54 = 0,$$

$$x_{1,2} = -\frac{1}{2}(3 \pm \sqrt{9+216}) = -\frac{1}{2}(3 \pm 15),$$

$$x_1 = 6, \; x_2 = -9.$$

Пользуясь формулой $y = x + 2$, получаем $y_1 = 8$, $y_2 = -7$.

Ответ Искомые числа 6 и 8 или –9 и –7. ◁

Задача 2 Произведение цифр искомого двузначного натурального числа в три раза меньше самого числа. Если к искомому числу прибавить 18, то получится число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке. Найти это число.

▶ Обозначив через x число десятков искомого числа, а через y число его единиц, запишем искомое число в виде $10x + y$.

Используя условия задачи, составляем систему уравнений

$$\begin{cases} 3xy = 10x + y, \\ 10x + y + 18 = 10y + x. \end{cases}$$

Преобразуем эту систему:

$$\begin{cases}10x+y-3xy=0,\\9x-9y+18=0,\end{cases}\qquad \begin{cases}10x+y-3xy=0,\\x-y+2=0.\end{cases}$$

Решим эту систему способом подстановки:

$$x=y-2,\quad 10y-20+y-3y^2+6y=0,$$

$$3y^2-17y+20=0,$$

$$y_{1,2}=\frac{17\pm\sqrt{289-240}}{6}=\frac{17\pm 7}{6},\quad y_1=4,\quad y_2=\frac{5}{3}.$$

Помня, что x и y — цифры искомого числа, берём только значение $y=4$, откуда $x=2$. Итак, искомое число — это число 24. Действительно, произведение его цифр $2\cdot 4=8$ в три раза меньше самого числа. Прибавляя к 24 число 18, получаем число 42, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке.

Ответ 24. ◁

Задача 3 Два грузовика, работая вместе, должны были перевезти груз за 6 ч. Так как второй опоздал к началу работы, то к его приезду первый перевёз уже $\frac{3}{5}$ всего груза. Остальную часть груза перевёз только второй грузовик, и потому перевозка груза заняла 12 ч. За какое время этот груз мог перевезти каждый грузовик, работая отдельно?

▶ Примем за единицу тот груз, который должны были перевезти грузовики. Обозначим время, которое затратил бы на перевозку всего груза первый грузовик, через x ч, а время, которое на это затратил бы второй грузовик, если бы они работали раздельно, через y ч. Тогда за один час первый грузовик перевёз бы $\frac{1}{x}$ часть груза, а второй — его $\frac{1}{y}$ часть.

Работая вместе, за один час они перевозили бы $\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)$ часть груза и по условию задачи перевезли бы груз за 6 ч. Поэтому $\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\cdot 6=1.$

Но в действительности первый грузовик, перевезя $\frac{3}{5}$ всего груза, затратил на это $\frac{3}{5}$ своего времени, а остальную часть груза перевёз второй грузовик, затратив на это $\frac{2}{5}$ своего времени.

Так как в этом случае всего было затрачено на перевозку груза 12 ч, то получаем второе уравнение:

$$\frac{3}{5}x + \frac{2}{5}y = 12.$$

Решение этой задачи свелось к решению системы уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) \cdot 6 = 1, \\ \frac{3}{5}x + \frac{2}{5}y = 12. \end{cases}$$

Сначала упростим эту систему, а затем решим её способом подстановки. Имеем

$$\begin{cases} 6x + 6y = xy, \\ 3x + 2y = 60, \end{cases}$$

$$3x = 60 - 2y, \quad 120 - 4y + 6y = \left(20 - \frac{2}{3}y\right)y,$$

$$60 + y = 10y - \frac{1}{3}y^2,$$

откуда $y^2 - 27y + 180 = 0$,

$$y_{1,2} = \frac{27}{2} \pm \sqrt{\frac{729}{4} - 180} = \frac{27}{2} \pm \frac{3}{2}, \; y_1 = 15, \; y_2 = 12.$$

Пользуясь формулой $x = 20 - \frac{2}{3}y$, получаем

$$x_1 = 10, \; x_2 = 12.$$

Ответ 10 ч и 15 ч — при разной грузоподъёмности; 12 ч и 12 ч — при одной и той же грузоподъёмности.

Упражнения

37 Произведение двух чисел равно 135, а их разность 6. Найти эти числа.

38 Разность двух чисел равна 18. Сумма этих чисел, сложенная с частным от деления большего на меньшее, равна 34. Найти эти числа.

39 Периметр прямоугольника равен 14 см, площадь его равна 12 см^2. Каковы стороны прямоугольника?

40 Площадь прямоугольного треугольника равна 90 см^2. Сумма площадей квадратов, построенных на его катетах, равна 369 см^2. Каковы катеты этого треугольника?

41 Два девятых класса одной школы приобрели билеты в театр. Первый класс израсходовал на билеты 4900 р. Второй класс купил на 15 билетов меньше, но заплатил за каждый билет на 35 р. дороже и истратил на билеты 3500 р. Сколько билетов и по какой цене куплено каждым классом?

42 Двое рабочих закончили порученную им работу за 12 ч. Если бы сначала один выполнил половину этой работы, а другой — остальную, то на выполнение всей работы понадобилось бы 25 ч. За какое время каждый из них закончил бы эту работу, работая один?

43 Бассейн наполняется водой из двух кранов. Сначала первый кран был открыт одну треть того времени, которое требуется для наполнения бассейна только через один второй кран. Затем, наоборот, второй кран был открыт одну треть того времени, которое требуется для наполнения бассейна через один первый кран. После этого оказалось, что наполнены $\frac{13}{18}$ бассейна. Оба крана наполняют бассейн за 3 ч 36 мин. Сколько времени нужно для наполнения бассейна каждым краном в отдельности?

44 Три коневодческие фермы сделали равные запасы овса, необходимого для подкормки лошадей, число которых на этих фермах было разным. Первой ферме этого запаса овса хватает на 105 дней. Второй ферме, имеющей на 10 лошадей больше первой, запаса овса хватит на 100 дней, если дневную норму овса для каждой лошади уменьшить на 1 кг. На столько же дней хватит овса третьей ферме, где лошадей на 10 меньше, чем на первой, но дневная норма овса на 3 кг больше, чем на первой. Сколько лошадей на каждой ферме и какова суточная норма овса на каждой из них?

Упражнения к главе I

45 Выполнить деление многочленов:

1) $(x^4 + 2x^3 - 6x^2 + 11x - 10) : (x^2 + 3x - 5)$;
2) $(x^4 + x^3 + x^2 - x - 2) : (x^3 + x - 2)$;
3) $(2x^4 + 2x^3 - 5x^2 - 2) : (x^2 + x - 2)$;
4) $(6x^4 - x^3 - x + 1) : (2x + 1)$.

46 Найти действительные корни уравнения:

1) $6x^3 - 5x^2 - 17x + 6 = 0$;

2) $x^3 - 3x^2 - 6x + 8 = 0$;

3) $2x^4 + 3x^3 - 10x^2 - 5x - 6 = 0$;

4) $3x^4 + 3x^3 - 8x^2 - 2x + 4 = 0$.

47 Решить уравнение:

1) $\frac{4x^2}{x-2} - \frac{4x}{x+3} = \frac{9x+2}{x^2+x-6}$;

2) $\frac{x^2}{x+3} + \frac{x}{x-2} = \frac{11x-12}{x^2+x-6}$.

Решить систему уравнений **(48—49)**.

48 1) $\begin{cases} 2x^2 - y = 2, \\ x - y = 1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 - xy - y^2 = 19, \\ x - y = 7. \end{cases}$

49 1) $\begin{cases} \frac{4}{x-1} - \frac{7}{y-1} = 1, \\ \frac{3}{x+3} = \frac{2}{y}; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \frac{3}{x+5} + \frac{2}{y-3} = 2, \\ \frac{4}{x-2} = \frac{1}{y-6}. \end{cases}$

50 Площадь прямоугольного треугольника равна 15 см^2, а сумма его катетов равна 11 см. Найти катеты.

51 Сумма диагоналей ромба равна 49 см. Площадь этого ромба равна 294 см^2. Найти диагонали ромба.

52 Разность двух натуральных чисел относится к их произведению как 1 : 24, а сумма этих чисел относится к их разности как 5 : 1. Найти эти числа.

53 Сумма двух взаимно обратных дробей равна $2\frac{1}{6}$, а их разность равна $\frac{5}{6}$. Найти эти дроби.

Проверь себя!

1 Выполнить деление многочленов:
$(2x^3 + x^2 - 4x + 3) : (2x + 1)$.

2 Решить уравнение:
$x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = 0$.

3 Решить систему уравнений:

1) $\begin{cases} x + y = 7, \\ xy = 10; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3y - x = 7, \\ y^2 + 3x = 1. \end{cases}$

4 Сумма квадратов числителя и знаменателя некоторой дроби равна 25. Сумма этой дроби и обратной ей дроби равна $\frac{25}{12}$. Найти дробь.

54 Найти действительные корни уравнения:

1) $x^5 + 3x^4 + 2x^3 + 6x^2 + 2x + 6 = 0$;
2) $x^5 - 2x^4 - 3x^3 + 6x^2 - 4x + 8 = 0$;
3) $4x^6 - 4x^5 - 5x^4 - 3x^3 - 7x^2 + x + 2 = 0$;
4) $x^6 - 2x^5 - 2x^4 + 6x^3 - 7x^2 + 8x - 4 = 0$.

55 Решить уравнение:

1) $\frac{2x^3+1}{2x+1} + \frac{3x^2}{3x-1} = \frac{15x^3}{6x^2+x-1}$;

2) $\frac{6x^3}{x+1} + \frac{5x^2-17x+2}{x-2} = \frac{18x}{2+x-x^2}$.

56 Выяснить, при каких действительных значениях a уравнение

$$\frac{x^4-10a^2x^2+9a^4}{2x^2-3x-2}=0$$

имеет четыре различных корня.

57 Решить систему уравнений:

1) $\begin{cases} xy=2, \\ xz=3, \\ x^2+y^2=5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=30, \\ y-x=3, \\ y-z=4; \end{cases}$

3) $\begin{cases} y^2-3xy+x^2-x+y+9=0, \\ y-x=2; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x^2+2xy+y^2-x-y=6, \\ x-2y=3. \end{cases}$

58 Водонапорный бак заполняется двумя трубами за 2 ч 55 мин. Первая труба может его наполнить на 2 ч скорее, чем вторая. За какое время каждая труба, работая отдельно, заполнит этот бак?

59 После двух последовательных снижений цен на одно и то же число процентов цена товара снизилась с 300 до 192 р. На сколько процентов снижалась цена этого товара каждый раз?

60 Теплоход прошёл по течению реки 48 км и столько же — против течения, затратив на весь путь 5 ч. Какова собственная скорость теплохода, если скорость течения реки 4 км/ч?

61 В зрительном зале клуба было 320 мест. После ремонта число мест в каждом ряду увеличилось на 4 и, кроме того, в зале добавился ещё один ряд. Сколько стало рядов в этом зале, если после ремонта стало 420 мест?

II
глава

Степень с рациональным показателем

§ 7 Степень с целым показателем

При рассмотрении свойств степени с натуральным показателем отмечалось, что свойство деления степеней

$$a^n : a^m = a^{n-m} \qquad (1)$$

справедливо при $n > m$ и $a \neq 0$.

Если $n \leqslant m$, то в правой части равенства (1) показатель степени $n - m$ отрицателен или равен нулю. *Степень с отрицательным и с нулевым показателями* определяют так, чтобы равенство (1) было верно не только при $n > m$, но и при $n \leqslant m$.

Например, если $n = 2$, $m = 5$, то по формуле (1) получаем:

$$a^2 : a^5 = a^{2-5} = a^{-3}.$$

С другой стороны,

$$a^2 : a^5 = \frac{a^2}{a^5} = \frac{a^2}{a^2 a^3} = \frac{1}{a^3}.$$

Поэтому считают, что $a^{-3} = \dfrac{1}{a^3}$.

Определение 1. Если $a \neq 0$ и n — натуральное число, то

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

Примеры:

1) $2^{-3}=\frac{1}{2^3}=\frac{1}{8}$; 2) $(-3)^{-4}=\frac{1}{(-3)^4}=\frac{1}{81}$;

3) $(-0{,}5)^{-3}=\frac{1}{(-0{,}5)^3}=-\frac{1}{0{,}125}=-8$.

Если $n = m$, то по формуле (1) получаем:

$$a^n : a^n = a^{n-n} = a^0.$$

С другой стороны, $a^n : a^n = \frac{a^n}{a^n}=1$. Поэтому считают, что $a^0 = 1$.

Определение 2. Если $a \neq 0$, то

$$\boldsymbol{a^0 = 1.}$$

Например, $3^0 = 1$, $\left(-\frac{2}{5}\right)^0=1$.

Степени с отрицательными показателями уже использовались при записи чисел в *стандартном виде*. Например:

$$0{,}00027 = 2{,}7\cdot\frac{1}{10^4} = 2{,}7\cdot 10^{-4}.$$

Все свойства степени с натуральным показателем справедливы и для степени с любым целым показателем.

Для любых $a \neq 0$, $b \neq 0$ и любых целых n и m справедливы равенства:

1. $\boldsymbol{a^n a^m = a^{n+m}}$
2. $\boldsymbol{a^n : a^m = a^{n-m}}$
3. $\boldsymbol{(a^n)^m = a^{nm}}$
4. $\boldsymbol{(ab)^n = a^n b^n}$
5. $\boldsymbol{\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}}$

Докажем, например, справедливость равенства $(ab)^n = a^n b^n$ при $n < 0$.

Пусть n — целое отрицательное число. Тогда $-n = k$, где k — натуральное число. Используя определение степени с отрицательным показателем и свойства степени с натуральным показателем, получаем:

$$(ab)^n=(ab)^{-k}=\frac{1}{(ab)^k}=\frac{1}{a^k b^k}=\frac{1}{a^k}\cdot\frac{1}{b^k}=$$
$$=a^{-k}b^{-k}=a^n b^n.$$

Аналогично доказываются и другие свойства степени с целым показателем.

Приведём примеры применения свойств степени с целым показателем:

1) $4^{-3} \cdot 4^{11} \cdot 4^{-6} = 4^{-3+11} \cdot 4^{-6} = 4^{-3+11-6} = 4^2 = 16$;

2) $\left(\dfrac{p^{-3}}{3q^2}\right)^{-2} = \dfrac{p^{-3\cdot(-2)}}{3^{-2}\cdot q^{2\cdot(-2)}} = \dfrac{3^2 p^6}{q^{-4}} = 9p^6q^4$.

Задача Упростить выражение $a^6(a^{-2} - a^{-4})(a^2 + a^3)^{-1}$.

▶ $a^6(a^{-2} - a^{-4})(a^2 + a^3)^{-1} = a^6\left(\dfrac{1}{a^2} - \dfrac{1}{a^4}\right)\cdot\dfrac{1}{a^2 + a^3} =$

$= a^6 \cdot \dfrac{a^2 - 1}{a^4} \cdot \dfrac{1}{a^2(1 + a)} = a - 1$. ◁

Упражнения

62 Вычислить:
1) $2^3 + (-3)^3 - (-2)^2 + (-1)^5$; 2) $(-7)^2 - (-4)^3 - 3^4$;
3) $13 \cdot 2^3 - 9 \cdot 2^3 + 2^3$; 4) $6(-2)^3 - 5(-2)^3 - (-2)^3$.

63 Представить выражение в виде степени с натуральным показателем:
1) $\dfrac{7^2 \cdot 7^{15}}{7^{13}}$; 2) $\dfrac{5^3 \cdot 5^{10} \cdot 5}{5^4 \cdot 5^{15}}$; 3) $\dfrac{a^2 a^8 b^3}{a^9 b^2}$; 4) $\dfrac{c^3 d^5 c^9}{c^{10} d^7}$.

64 (Устно.) Вычислить:
1) 1^{-5}; 2) 4^{-3}; 3) $(-10)^0$; 4) $(-5)^{-2}$; 5) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-4}$; 6) $\left(\dfrac{3}{7}\right)^{-1}$.

65 Записать в виде степени с отрицательным показателем:
1) $\dfrac{1}{4^5}$; 2) $\dfrac{1}{21^3}$; 3) $\dfrac{1}{x^7}$; 4) $\dfrac{1}{a^9}$.

Вычислить **(66—67)**.

66 1) $\left(\dfrac{10}{3}\right)^{-3}$; 2) $\left(-\dfrac{9}{11}\right)^{-2}$; 3) $(0{,}2)^{-4}$;
4) $(0{,}5)^{-5}$; 5) $-(-17)^{-1}$; 6) $-(-13)^{-2}$.

67 1) $3^{-1} + (-2)^{-2}$; 2) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-3} - 4^{-2}$;
3) $(0{,}2)^{-2} + (0{,}5)^{-5}$; 4) $(-0{,}1)^{-3} - (-0{,}2)^{-3}$.

68 (Устно.) Сравнить с единицей:
1) 12^{-3}; 2) 21^0; 3) $(0{,}6)^{-5}$; 4) $\left(\dfrac{5}{19}\right)^{-4}$.

69 Записать без степеней с отрицательным показателем:
1) $(x - y)^{-2}$; 2) $(x + y)^{-3}$; 3) $3b^{-5}c^8$;
4) $9a^3b^{-4}$; 5) $a^{-1}b^2c^{-3}$; 6) $a^2b^{-1}c^{-4}$.

Вычислить (70—71).

70 1) $\left(\frac{1}{7}\right)^{-3}\left(\frac{1}{7}\right)$; 2) $\left(-\frac{1}{5}\right)\left(-\frac{1}{5}\right)^{-4}$;

3) $0{,}3^7 \cdot 0{,}3^{-10}$; 4) $17^{-5} \cdot 17^3 \cdot 17$.

71 1) $9^7 : 9^{10}$; 2) $(0{,}2)^2 : (0{,}2)^{-2}$;

3) $\left(\frac{2}{13}\right)^{-12} : \left(\frac{2}{13}\right)^{-10}$; 4) $\left(\frac{2}{5}\right)^{3} : \left(\frac{2}{5}\right)^{-1}$.

72 Возвести степень в степень:
1) $(a^3)^{-5}$; 2) $(b^{-2})^{-4}$; 3) $(a^{-3})^7$; 4) $(b^7)^{-4}$.

73 Возвести в степень произведение:
1) $(ab^{-2})^3$; 2) $(a^2b^{-1})^4$; 3) $(2a^2)^{-6}$; 4) $(3a^3)^{-4}$.

74 Выполнить действия:

1) $\left(\frac{a^8}{b^7}\right)^{-2}$; 2) $\left(\frac{m^{-4}}{n^{-5}}\right)^{-3}$; 3) $\left(\frac{2x^6}{3y^{-4}}\right)^{2}$; 4) $\left(\frac{-4x^{-5}y}{z^3}\right)^{3}$.

75 Вычислить значение выражения:

1) $(x^2y^{-2} - 4y^{-2}) \cdot \left(\frac{1}{y}\right)^{-2}$ при $x = 5$, $y = 6{,}7$;

2) $((a^2b^{-1})^4 - a^0b^4) : \frac{a^4 - b^4}{b^2}$ при $a = 2$, $b = -3$.

Записать в стандартном виде (76—77).

76 1) $200\,000^4$; 2) $0{,}0003^3$; 3) 4000^{-2}; 4) $0{,}002^{-3}$.

77 1) 0,0000087; 2) 0,00000005086; 3) $\frac{1}{125}$; 4) $\frac{1}{625}$.

78 Процесс шлифовки стекла заканчивается, когда глубина выемок на его поверхности не превышает $3 \cdot 10^{-3}$ мм. Записать число $3 \cdot 10^{-3}$ в виде десятичной дроби.

79 Атом сверхтяжёлого водорода существует лишь 0,00000000001 с. Записать число 0,00000000001 в виде степени с отрицательным показателем.

80 Размеры вируса гриппа составляют около 10^{-4} мм. Записать число 10^{-4} в виде десятичной дроби.

81 Дробь представить в виде степени и найти её значение при данном значении a:

1) $\frac{a^8a^{-7}}{a^{-2}}$, $a = 0{,}8$; 2) $\frac{a^{15}a^3}{a^{13}}$, $a = \frac{1}{2}$.

82 Вычислить:
1) $((-20)^7)^{-7} : ((-20)^{-6})^8 + 2^{-2}$;

2) $((-17)^{-4})^{-6} : ((-17)^{-13})^{-2} - \left(\frac{1}{17}\right)^{2}$.

№ 2

РЕШИТЬ ЧИСЛОВОЙ РЕБУС:

1)

$$\begin{array}{rccccc}
 & & & * & 7 & 6 \\
\times & & & & * & * \\
\hline
 & & 1 & 8 & * & * \\
 & * & * & * & * & \\
\hline
 & * & * & 9 & 2 & 0
\end{array}$$

2)

$$\begin{array}{rccccc}
 & & & 2 & * & 9 \\
\times & & & & * & * \\
\hline
 & & & * & 5 & * \\
 & * & * & * & * & \\
\hline
 & * & * & * & 0 & 6
\end{array}$$

3)

$$\begin{array}{rccccc}
 & & & * & * & 7 \\
\times & & & 3 & * & * \\
\hline
 & & * & 0 & * & 3 \\
 & & * & 1 & * & \\
 & * & 5 & * & & \\
\hline
 & * & 7 & * & * & 3
\end{array}$$

83 Применить свойства степени и вычислить на микрокалькуляторе с точностью до 0,01:

1) $(1,3)^{-118} \cdot (1,3)^{127}$; 2) $(0,87)^{-74} : (0,87)^{-80}$;

3) $\left(\frac{17}{19}\right)^{-47} : \left(\frac{17}{19}\right)^{-51}$; 4) $\left(\frac{23}{21}\right)^{56} \cdot \left(\frac{23}{21}\right)^{-52}$.

84 Вычислить на микрокалькуляторе и записать результат в стандартном виде:

1) $(786^{-7})^4 : (786^5)^{-6}$; 2) $(923^3)^{-6} \cdot (923^5)^4$;

3) $(1,76)^2 \cdot 35^2$; 4) $47^3 : (2,5)^3$.

85 С помощью микрокалькулятора вычислить объём куба, длина ребра которого равна:

1) $1,54 \cdot 10^{-4}$ мм; 2) $3,18 \cdot 10^5$ км.

86 Упростить:

1) $(a^{-3} + b^{-3}) \cdot (a^{-2} - b^{-2})^{-1} \cdot (a^{-2} - a^{-1}b^{-1} + b^{-2})^{-1}$;

2) $(a^{-2}b - ab^{-2}) \cdot (a^{-2} + a^{-1}b^{-1} + b^{-2})^{-1}$.

§ 8 Арифметический корень натуральной степени

Задача 1 Решить уравнение $x^4 = 81$.

▶ Запишем уравнение в виде

$$x^4 - 81 = 0$$

или

$$(x^2 - 9)(x^2 + 9) = 0.$$

Так как $x^2 + 9 \neq 0$, то $x^2 - 9 = 0$, откуда $x_1 = 3$, $x_2 = -3$. ◁

Итак, уравнение $x^4 = 81$ имеет два действительных корня $x_1 = 3$, $x_2 = -3$. Их называют корнями четвёртой степени из числа 81, а положительный корень (число 3) называют *арифметическим корнем* четвёртой степени из числа 81 и обозначают $\sqrt[4]{81}$. Таким образом, $\sqrt[4]{81} = 3$.

Можно доказать, что уравнение $x^n = a$, где n — натуральное число, a — неотрицательное число, имеет единственный неотрицательный корень. Этот корень называют арифметическим корнем n-й степени из числа a.

О п р е д е л е н и е. *Арифметическим корнем* натуральной степени $n \geqslant 2$ из неотрицательного числа a называется неотрицательное число, n-я степень которого равна a.

Арифметический корень n-й степени из числа a обозначается так: $\sqrt[n]{a}$. Число a называется подкоренным выражением. Если $n = 2$, то вместо $\sqrt[2]{a}$ пишут $\sqrt{a}$.

Арифметический корень второй степени называют также *квадратным корнем*, а корень третьей степени — *кубическим корнем*.

В тех случаях, когда ясно, что речь идёт об арифметическом корне n-й степени, кратко говорят: «Корень n-й степени».

Чтобы, используя определение, доказать, что $\sqrt[n]{a}$ равен b, нужно показать, что:
1) $b \geqslant 0$; 2) $b^n = a$.

Например, $\sqrt[3]{64} = 4$, так как $4 > 0$ и $4^3 = 64$.

Из определения арифметического корня следует, что *если $a \geqslant 0$, то*

$$(\sqrt[n]{a})^n = a, \quad \sqrt[n]{a^n} = a.$$

Например, $(\sqrt[5]{7})^5 = 7$, $\sqrt[6]{13^6} = 13$.

Действие, посредством которого отыскивается корень n-й степени, называется *извлечением корня n-й степени*. Это действие является обратным к возведению в n-ю степень.

Задача 2 Решить уравнение $x^3 = -8$.

▶ Это уравнение можно записать так:

$$-x^3 = 8 \text{ или } (-x)^3 = 8.$$

Обозначим $-x = y$, тогда $y^3 = 8$.
Это уравнение имеет один положительный корень $y = \sqrt[3]{8} = 2$. Отрицательных корней уравнение $y^3 = 8$ не имеет, так как $y^3 < 0$ при $y < 0$. Число $y = 0$ также не является корнем этого уравнения.
Итак, уравнение $y^3 = 8$ имеет только один корень $y = 2$, а значит, уравнение $x^3 = -8$ имеет только один корень $x = -y = -2$.

Ответ $x = -2$. ◁

Коротко решение уравнения $x^3 = -8$ можно записать так:

$$x = -\sqrt[3]{8} = -2.$$

Вообще, для любого нечётного натурального числа $2k + 1$ уравнение $x^{2k+1} = a$ при $a < 0$ имеет только один корень, причём отрицательный. Этот корень обозначается, как и арифметический корень, символом $\sqrt[2k+1]{a}$. Его называют *корнем нечётной степени из отрицательного числа*.

Например, $\sqrt[3]{-27} = -3$, $\sqrt[5]{-32} = -2$.

Корень нечётной степени из отрицательного числа a связан с арифметическим корнем из числа $-a = |a|$ следующим равенством:

$$\sqrt[2k+1]{a} = -\sqrt[2k+1]{-a} = -\sqrt[2k+1]{|a|}.$$

Например, $\sqrt[5]{-243} = -\sqrt[5]{243} = -3$.

Упражнения

87 (Устно.) 1) Найти арифметический квадратный корень из числа: 1; 0; 16; 0,81; 169; $\frac{1}{289}$.

2) Найти арифметический кубический корень из числа: 1; 0; 125; $\frac{1}{27}$; 0,027; 0,064.

3) Найти арифметический корень четвёртой степени из числа: 0; 1; 16; $\frac{16}{81}$; $\frac{256}{625}$; 0,0016.

Вычислить (88—90).

88 1) $\sqrt[6]{36^3}$; 2) $\sqrt[12]{64^2}$; 3) $\sqrt[4]{\left(\frac{1}{25}\right)^2}$; 4) $\sqrt[8]{225^4}$.

89 1) $\sqrt[3]{10^6}$; 2) $\sqrt[3]{3^{12}}$; 3) $\sqrt[4]{\left(\frac{1}{2}\right)^{12}}$; 4) $\sqrt[4]{\left(\frac{1}{3}\right)^{16}}$.

90 1) $\sqrt[3]{-64}$; 2) $\sqrt[15]{-1}$; 3) $\sqrt[3]{-\frac{1}{27}}$;

4) $\sqrt[5]{-1024}$; 5) $\sqrt[3]{-34^3}$; 6) $\sqrt[7]{-8^7}$.

91 Решить уравнение:

1) $x^4 = 81$; 2) $x^5 = -\frac{1}{32}$; 3) $5x^5 = -160$; 4) $2x^6 = 128$.

92 При каких значениях x имеет смысл выражение:

1) $\sqrt[6]{2x-3}$; 2) $\sqrt[3]{x+3}$; 3) $\sqrt[3]{2x^2-x-1}$; 4) $\sqrt[4]{\frac{2-3x}{2x-4}}$?

Вычислить (93—94).

93 1) $\sqrt[3]{-125} + \frac{1}{8}\sqrt[6]{64}$; 2) $\sqrt[5]{32} - 0{,}5\sqrt[3]{-216}$;

3) $-\frac{1}{3}\sqrt[4]{81} + \sqrt[4]{625}$; 4) $\sqrt[3]{-1000} - \frac{1}{4}\sqrt[4]{256}$;

5) $\sqrt[4]{0{,}0001} - 2\sqrt{0{,}25} + \sqrt[5]{-\frac{1}{32}}$;

6) $\sqrt[5]{\frac{1}{243}} + \sqrt[3]{-0{,}001} - \sqrt[4]{0{,}0016}$.

94 1) $\sqrt{9+\sqrt{17}}\cdot\sqrt{9-\sqrt{17}}$; 2) $(\sqrt{3+\sqrt{5}}-\sqrt{3-\sqrt{5}})^2$;

3) $(\sqrt{5+\sqrt{21}}+\sqrt{5-\sqrt{21}})^2$; 4) $\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}-\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$.

95 Упростить:

1) $\sqrt[3]{(x-2)^3}$ при: а) $x \geqslant 2$; б) $x < 2$;

2) $\sqrt{(3-x)^6}$ при: а) $x \leqslant 3$; б) $x > 3$.

96 Сколько имеется натуральных чисел n, таких, что $1987 < \sqrt{n} < 1988$?

§ 9 Свойства арифметического корня

Арифметический корень n-й степени обладает следующими *свойствами*:

Если $a \geqslant 0$, $b > 0$ и n, m — натуральные числа, причём $n \geqslant 2$, $m \geqslant 2$, то

1. $\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}$
2. $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$
3. $(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m}$
4. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[nm]{a}$

В свойстве 1 число b может также быть равным 0, в свойстве 3 число m может быть любым целым, если $a > 0$.

Докажем, например, что

$$\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}.$$

Воспользуемся определением арифметического корня:

1) $\sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b} \geqslant 0$, так как $a \geqslant 0$ и $b \geqslant 0$.

2) $(\sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b})^n = ab$, так как $(\sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b})^n = (\sqrt[n]{a})^n(\sqrt[n]{b})^n = ab$.

Аналогично доказываются и остальные свойства. Приведём примеры применения свойств арифметического корня.

1) $\sqrt[4]{27}\,\sqrt[4]{3}=\sqrt[4]{27\cdot 3}=\sqrt[4]{81}=\sqrt[4]{3^4}=3;$

2) $\sqrt[3]{\dfrac{256}{625}}:\sqrt[3]{\dfrac{4}{5}}=\sqrt[3]{\dfrac{256}{625}:\dfrac{4}{5}}=\dfrac{\sqrt[3]{64}}{\sqrt[3]{125}}=\dfrac{4}{5};$

3) $\sqrt[7]{5^{21}}=\sqrt[7]{(5^7)^3}=(\sqrt[7]{5^7})^3=5^3=125;$

4) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{4096}}=\sqrt[12]{4096}=\sqrt[12]{2^{12}}=2;$

5) $(\sqrt[4]{9})^{-2}=\sqrt[4]{9^{-2}}=\sqrt[4]{\dfrac{1}{81}}=\dfrac{1}{3}.$

Задача Упростить выражение

$$\frac{(\sqrt[4]{a^3b^2}\,)^4}{\sqrt[3]{\sqrt{a^{12}b^6}}},\text{ где } a>0,\ b>0.$$

▶ Используя свойства арифметического корня, получаем:

$$\frac{(\sqrt[4]{a^3b^2}\,)^4}{\sqrt[3]{\sqrt{a^{12}b^6}}}=\frac{a^3b^2}{\sqrt[6]{a^{12}b^6}}=\frac{a^3b^2}{a^2b}=ab.$$ ◁

Упражнения[1]

Вычислить **(97—100)**.

97 1) $\sqrt[3]{343\cdot 0{,}125}$; 2) $\sqrt[3]{512\cdot 216}$;
3) $\sqrt[4]{256\cdot 0{,}0081}$; 4) $\sqrt[5]{32\cdot 100\,000}$.

98 1) $\sqrt[3]{5^3\cdot 7^3}$; 2) $\sqrt[4]{11^4\cdot 3^4}$;
3) $\sqrt[5]{(0{,}2)^5\cdot 8^5}$; 4) $\sqrt[7]{\left(\dfrac{1}{3}\right)^7\cdot 21^7}$.

99 1) $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{500}$; 2) $\sqrt[3]{0{,}2}\cdot\sqrt[3]{0{,}04}$; 3) $\sqrt[4]{324}\cdot\sqrt[4]{4}$; 4) $\sqrt[5]{2}\cdot\sqrt[5]{16}$.

100 1) $\sqrt[5]{3^{10}\cdot 2^{15}}$; 2) $\sqrt[3]{2^3\cdot 5^6}$; 3) $\sqrt[4]{3^{12}\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^8}$; 4) $\sqrt[10]{4^{30}\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{20}}$.

101 Извлечь корень:
1) $\sqrt[3]{64x^3z^6}$; 2) $\sqrt[4]{a^8b^{12}}$; 3) $\sqrt[5]{32x^{10}y^{20}}$; 4) $\sqrt[6]{a^{12}b^{18}}$.

---

[1] Здесь и далее буквами обозначены положительные числа, если нет дополнительных условий.

102 Упростить выражение:

1) $\sqrt[3]{2ab^2}\cdot\sqrt[3]{4a^2b}$; 2) $\sqrt[4]{3a^2b^3}\cdot\sqrt[4]{27a^2b}$;

3) $\sqrt[4]{\frac{ab}{c}}\cdot\sqrt[4]{\frac{a^3c}{b}}$; 4) $\sqrt[3]{\frac{16a}{b^2}}\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{2ab}}$.

Вычислить (103—104).

103 1) $\sqrt[3]{\frac{64}{125}}$; 2) $\sqrt[4]{\frac{16}{81}}$; 3) $\sqrt[3]{3\frac{3}{8}}$; 4) $\sqrt[5]{7\frac{19}{32}}$.

104 1) $\sqrt[4]{324}:\sqrt[4]{4}$; 2) $\sqrt[3]{128}:\sqrt[3]{2000}$; 3) $\frac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt[3]{2}}$;

4) $\frac{\sqrt[5]{256}}{\sqrt[5]{8}}$; 5) $(\sqrt{20}-\sqrt{45}):\sqrt{5}$; 6) $(\sqrt[3]{625}-\sqrt[3]{5}):\sqrt[3]{5}$.

105 Упростить выражение:

1) $\sqrt[5]{a^6b^7}:\sqrt[5]{ab^2}$; 2) $\sqrt[3]{81x^4y}:\sqrt[3]{3xy}$;

3) $\sqrt[3]{\frac{3x}{y^2}}:\sqrt[3]{\frac{y}{9x^2}}$; 4) $\sqrt[4]{\frac{2b}{a^3}}:\sqrt[4]{\frac{a}{8b^3}}$.

Вычислить (106—107).

106 1) $(\sqrt[6]{7^3})^2$; 2) $(\sqrt[6]{9})^{-3}$; 3) $(\sqrt[10]{32})^2$; 4) $(\sqrt[8]{16})^{-4}$.

107 1) $\sqrt{\sqrt[3]{729}}$; 2) $\sqrt{\sqrt{1024}}$; 3) $\sqrt[3]{\sqrt[3]{9}}\cdot\sqrt[9]{3^7}$; 4) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{25}}\cdot\sqrt[6]{5^5}$.

108 Упростить выражение:

1) $(\sqrt[3]{x})^6$; 2) $(\sqrt[3]{y^2})^3$; 3) $(\sqrt{a}\cdot\sqrt[3]{b})^6$;

4) $(\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt[4]{b^3})^{12}$; 5) $\left(\sqrt{\sqrt[3]{a^2b}}\right)^6$; 6) $\left(\sqrt[3]{\sqrt[4]{27a^3}}\right)^4$.

Вычислить (109—110).

109 1) $\sqrt[3]{\frac{3}{2}}\cdot\sqrt[3]{2\frac{1}{4}}$; 2) $\sqrt[4]{\frac{3}{4}}\cdot\sqrt[4]{6\frac{3}{4}}$; 3) $\sqrt[4]{15\frac{5}{8}}:\sqrt[4]{\frac{2}{5}}$;

4) $\sqrt[3]{11\frac{1}{4}}:\sqrt[3]{3\frac{1}{3}}$; 5) $\left(\sqrt[3]{\sqrt{27}}\right)^2$; 6) $\left(\sqrt{\sqrt[3]{16}}\right)^3$.

110 1) $\frac{\sqrt[3]{49}\cdot\sqrt[3]{112}}{\sqrt[3]{250}}$; 2) $\frac{\sqrt[4]{54}\cdot\sqrt[4]{120}}{\sqrt[4]{5}}$;

3) $\frac{\sqrt[4]{32}}{\sqrt[4]{2}}+\sqrt[6]{27^2}-\sqrt{\sqrt[3]{64}}$; 4) $\sqrt[3]{3\frac{3}{8}}+\sqrt[4]{18}\cdot\sqrt[4]{4\frac{1}{2}}-\sqrt{\sqrt{256}}$;

5) $\sqrt[3]{11-\sqrt{57}}\cdot\sqrt[3]{11+\sqrt{57}}$; 6) $\sqrt[4]{17-\sqrt{33}}\cdot\sqrt[4]{17+\sqrt{33}}$.

Упростить выражение (111—113).

111 1) $\sqrt[3]{\frac{ab^2}{c}}\cdot\sqrt[3]{\frac{a^5b}{c^2}}$; 2) $\sqrt[5]{\frac{8a^3}{b^2}}\cdot\sqrt[5]{\frac{4a^7}{b^3}}$;

3) $\frac{\sqrt[4]{a^2b^2c}\cdot\sqrt[4]{a^3b^3c^2}}{\sqrt[4]{abc^3}}$; 4) $\frac{\sqrt[3]{2a^4b}\cdot\sqrt[3]{4ab}}{2b\sqrt[3]{a^2b^2}}$;

5) $(\sqrt[5]{a^3})^5\cdot(\sqrt[3]{b^2})^3$; 6) $(\sqrt[4]{a^3b^3})^4:(\sqrt[3]{ab^2})^3$.

112 1) $\sqrt[3]{2ab}\cdot\sqrt[3]{4a^2b}\cdot\sqrt[3]{27b}$; 2) $\sqrt[4]{abc}\cdot\sqrt[4]{a^3b^2c}\cdot\sqrt[4]{b^5c^2}$;

3) $\frac{\sqrt[5]{a^3b^2}\cdot\sqrt[5]{3a^2b^3}}{\sqrt[5]{3ab}}$; 4) $\frac{\sqrt[4]{8x^2y^5}\cdot\sqrt[4]{4x^3y}}{\sqrt[4]{2xy^2}}$.

113 1) $\sqrt[3]{\sqrt[3]{a^{18}}}+\left(\sqrt{\sqrt[3]{a^4}}\right)^3$; 2) $\left(\sqrt{\sqrt[3]{x^2}}\right)^3+2\left(\sqrt[4]{\sqrt{x}}\right)^8$;

3) $2\sqrt{\sqrt{a^4b^8}}-\left(\sqrt[3]{\sqrt{a^3b^6}}\right)^2$; 4) $\sqrt[3]{\sqrt{x^6y^{12}}}-(\sqrt[5]{xy^2})^5$;

5) $\left(\sqrt{\sqrt[4]{x^8y^2}}\right)^4-(\sqrt[4]{x^2y^8})^2$; 6) $\left(\left(\sqrt[5]{a\sqrt[5]{a}}\right)^5-\sqrt[5]{a}\right):\sqrt[10]{a^2}$.

114 Вычислить на микрокалькуляторе с точностью до 0,01:
1) $\sqrt{7}\cdot\sqrt{14}:\sqrt{3}$; 2) $\sqrt{6{,}7}\cdot\sqrt{23}\cdot\sqrt{0{,}37}$.

115 Вычислить:
1) $\frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{9}}{\sqrt[6]{3}}$; 2) $\frac{\sqrt[3]{7}\sqrt[4]{343}}{\sqrt[12]{7}}$; 3) $(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{25})(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{5})$;
4) $(\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4})(\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2})$.

116 Доказать, что $\sqrt{4+2\sqrt{3}}-\sqrt{4-2\sqrt{3}}=2$.

117 Упростить выражение:
1) $\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}}-\frac{\sqrt{a}+\sqrt[4]{ab}}{\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}}$; 2) $\frac{a-b}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}-\frac{a+b}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}$;

3) $\left(\frac{1}{\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}}-\frac{1}{\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}}\right)(\sqrt{a}-\sqrt{b})$;

4) $\left(\frac{a+b}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}-\sqrt[3]{ab}\right):(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b})^2$.

§ 10 Степень с рациональным показателем

Задача 1 Вычислить $\sqrt[4]{5^{12}}$.

▶ Так как $5^{12} = (5^3)^4$, то $\sqrt[4]{5^{12}} = \sqrt[4]{(5^3)^4} = 5^3 = 125$. ◁

Таким образом, $\sqrt[4]{5^{12}} = 5^{\frac{12}{4}}$. Точно так же можно показать, что

$$\sqrt[5]{7^{-15}} = 7^{-\frac{15}{5}}.$$

Вообще, если n — натуральное число, $n \geqslant 2$, m — целое число и частное $\frac{m}{n}$ является целым числом, то при $a > 0$ справедливо равенство

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}. \quad (1)$$

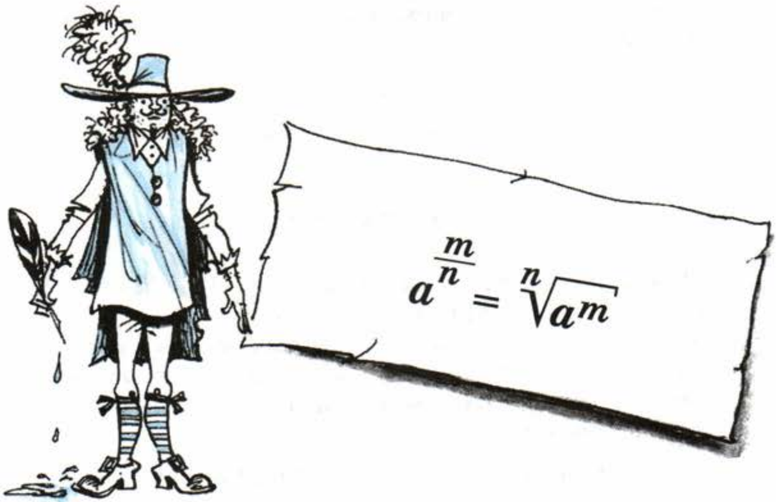
● По условию $\frac{m}{n}$ — целое число, т. е. при делении m на n в результате получается целое число k. Тогда из равенства $\frac{m}{n} = k$ следует, что $m = kn$. Применяя свойства степени и арифметического корня, получаем:

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n]{a^{kn}} = \sqrt[n]{(a^k)^n} = a^k = a^{\frac{m}{n}}. \ ○$$

Если же частное $\frac{m}{n}$ не является целым числом, то степень $a^{\frac{m}{n}}$, где $a > 0$, определяют так, чтобы осталась верной формула (1), т. е. и в этом случае считают, что

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}. \quad (2)$$

Таким образом, формула (2) справедлива для любого целого числа m, любого натурального числа $n \geqslant 2$ и $a > 0$.



Например,

$$16^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{16^3} = \sqrt[4]{2^{12}} = 2^3 = 8;$$

$$7^{\frac{5}{4}} = \sqrt[4]{7^5} = \sqrt[4]{7^4 \cdot 7} = 7\sqrt[4]{7};$$

$$27^{-\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{27^{-2}} = \sqrt[3]{\frac{1}{27^2}} = \frac{\sqrt[3]{1}}{\sqrt[3]{3^6}} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}.$$

Напомним, что *рациональное число* r — это число вида $\frac{m}{n}$, т. е. $r = \frac{m}{n}$, где m — целое, n — натуральное число. Тогда по формуле (2) получаем $a^r = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.

Таким образом, степень определена для любого рационального показателя и любого положительного основания.

Если $r = \frac{m}{n} > 0$, то выражение $\sqrt[n]{a^m}$ имеет смысл не только при $a > 0$, но и при $a = 0$, причём

$$\sqrt[n]{0^m} = 0.$$

Поэтому считают, что при $r > 0$ выполняется равенство $0^r = 0$.

Пользуясь формулами (1) и (2), степень с рациональным показателем можно представить в виде корня и наоборот.

Отметим, что из формулы (2) и свойств корня следует равенство

$$a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{mk}{nk}},$$

где $a > 0$, m — целое и n, k — натуральные числа.

Например, $7^{\frac{3}{4}} = 7^{\frac{6}{8}} = 7^{\frac{9}{12}}$.

Можно показать, что *все свойства степени с натуральным показателем верны для степени с любым рациональным показателем и положительным основанием.* А именно для любых рациональных чисел p и q и любых $a > 0$ и $b > 0$ верны равенства:

1. $\boldsymbol{a^p a^q = a^{p+q}}$
2. $\boldsymbol{a^p : a^q = a^{p-q}}$
3. $\boldsymbol{(a^p)^q = a^{pq}}$
4. $\boldsymbol{(ab)^p = a^p b^p}$
5. $\boldsymbol{\left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}}$

Эти свойства вытекают из свойств корней. Докажем, например, свойство $a^p a^q = a^{p+q}$.

Пусть $p = \frac{m}{n}$, $q = \frac{k}{l}$, где n и l — натуральные числа, m и k — целые числа. Нужно доказать, что

$$a^{\frac{m}{n}} a^{\frac{k}{l}} = a^{\frac{m}{n} + \frac{k}{l}}. \qquad (3)$$

Приведя дроби $\frac{m}{n}$ и $\frac{k}{l}$ к общему знаменателю, запишем левую часть равенства (3) в виде

$$a^{\frac{m}{n}} a^{\frac{k}{l}} = a^{\frac{ml}{nl}} a^{\frac{kn}{nl}}.$$

Используя определение степени с рациональным показателем, свойства корня и степени с целым показателем, получаем:

$$a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{k}{l}} = a^{\frac{ml}{nl}} \cdot a^{\frac{kn}{nl}} = \sqrt[nl]{a^{ml}} \cdot \sqrt[nl]{a^{kn}} =$$

$$= \sqrt[nl]{a^{ml} \cdot a^{kn}} = \sqrt[nl]{a^{ml+kn}} = a^{\frac{ml+kn}{nl}} = a^{\frac{m}{n} + \frac{k}{l}}.$$

Аналогично доказываются остальные свойства степени с рациональным показателем.

Приведём примеры применения свойств степени.

1) $7^{\frac{1}{4}} \cdot 7^{\frac{3}{4}} = 7^{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 7;$

2) $9^{\frac{2}{3}} : 9^{\frac{1}{6}} = 9^{\frac{2}{3} - \frac{1}{6}} = 9^{\frac{1}{2}} = \sqrt{9} = 3;$

3) $(16^{\frac{1}{3}})^{\frac{9}{4}} = 16^{\frac{1}{3} \cdot \frac{9}{4}} = 16^{\frac{3}{4}} = (2^4)^{\frac{3}{4}} = 2^{4 \cdot \frac{3}{4}} = 2^3 = 8;$

4) $24^{\frac{2}{3}} = (2^3 \cdot 3)^{\frac{2}{3}} = 2^{3 \cdot \frac{2}{3}} \cdot 3^{\frac{2}{3}} = 4\sqrt[3]{3^2} = 4\sqrt[3]{9};$

5) $\left(\frac{8}{27}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{8^{\frac{1}{3}}}{27^{\frac{1}{3}}} = \frac{(2^3)^{\frac{1}{3}}}{(3^3)^{\frac{1}{3}}} = \frac{2}{3}.$

Задача 2 Вычислить $25^{\frac{1}{5}} \cdot 125^{\frac{1}{5}}$.

▶ $25^{\frac{1}{5}} \cdot 125^{\frac{1}{5}} = (25 \cdot 125)^{\frac{1}{5}} = (5^5)^{\frac{1}{5}} = 5.$ ◁

Задача 3 Упростить выражение $\dfrac{a^{\frac{4}{3}}b + ab^{\frac{4}{3}}}{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}}$.

▶ $$\frac{a^{\frac{4}{3}}b + ab^{\frac{4}{3}}}{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}} = \frac{ab(a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}})}{a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}}} = ab.$$ ◁

Задача 4 Упростить выражение $\dfrac{a^{\frac{1}{3}} - a^{\frac{7}{3}}}{a^{\frac{1}{3}} - a^{\frac{4}{3}}} - \dfrac{a^{-\frac{1}{3}} - a^{\frac{5}{3}}}{a^{\frac{2}{3}} + a^{-\frac{1}{3}}}$.

▶ $$\frac{a^{\frac{1}{3}} - a^{\frac{7}{3}}}{a^{\frac{1}{3}} - a^{\frac{4}{3}}} - \frac{a^{-\frac{1}{3}} - a^{\frac{5}{3}}}{a^{\frac{2}{3}} + a^{-\frac{1}{3}}} = \frac{a^{\frac{1}{3}}(1 - a^2)}{a^{\frac{1}{3}}(1 - a)} - \frac{a^{-\frac{1}{3}}(1 - a^2)}{a^{-\frac{1}{3}}(1 + a)} =$$

$= 1 + a - (1 - a) = 2a.$ ◁

Покажем, как можно ввести *степень с иррациональным показателем*, на примере $3^{\sqrt{2}}$. Найдём приближённое значение $\sqrt{2}$ с помощью микрокалькулятора:

$$2 \; \boxed{\sqrt{}} \; \underline{1{,}414213562}.$$

Выпишем последовательно приближённые значения $\sqrt{2}$ с точностью до 0,1; 0,01; 0,001 и т. д. Получим последовательность:

$$1{,}4;\ 1{,}41;\ 1{,}414;\ 1{,}4142;\ \ldots .$$

Запишем последовательность степеней числа 3 с этими рациональными показателями:

$$3^{1,4},\ 3^{1,41};\ 3^{1,414};\ 3^{1,4142};\ \ldots .$$

Можно показать, что эти степени являются последовательными приближёнными значениями некоторого действительного числа, которое обозначают $3^{\sqrt{2}}$. Вычислим на микрокалькуляторе:

$$3^{1,4} = \underline{4},655536722,$$
$$3^{1,41} = \underline{4,7}06965002,$$
$$3^{1,414} = \underline{4,72}7695035,$$
$$3^{1,4142} = \underline{4,728}73393,$$
$$3^{\sqrt{2}} = \underline{4,72880438}8.$$

Аналогично определяется степень a^b с положительным основанием a и любым иррациональным показателем. Таким образом, теперь *степень с положительным основанием определена для любого действительного показателя, причём свойства степени с действительным показателем такие же, как и свойства степени с рациональным показателем.*

Упражнения

118 (Устно.) Представить в виде степени с рациональным показателем:

1) $\sqrt{x^3}$; 2) $\sqrt[3]{a^4}$; 3) $\sqrt[4]{b^3}$;

4) $\sqrt[5]{x^{-1}}$; 5) $\sqrt[6]{a}$; 6) $\sqrt[7]{b^{-3}}$.

119 (Устно.) Представить в виде корня из степени с целым показателем:

1) $x^{\frac{1}{4}}$; 2) $y^{\frac{2}{5}}$; 3) $a^{-\frac{5}{6}}$;

4) $b^{-\frac{1}{3}}$; 5) $(2x)^{\frac{1}{2}}$; 6) $(3b)^{-\frac{2}{3}}$.

Вычислить (120—123).

120 1) $64^{\frac{1}{2}}$; 2) $27^{\frac{1}{3}}$; 3) $8^{\frac{2}{3}}$;

4) $81^{\frac{3}{4}}$; 5) $16^{-0,75}$; 6) $9^{-1,5}$.

121 1) $2^{\frac{4}{5}} \cdot 2^{\frac{11}{5}}$; 2) $5^{\frac{2}{7}} \cdot 5^{\frac{5}{7}}$; 3) $9^{\frac{2}{3}} : 9^{\frac{1}{6}}$;

4) $4^{\frac{1}{3}} : 4^{\frac{5}{6}}$; 5) $(7^{-3})^{-\frac{2}{3}}$; 6) $(8^{\frac{1}{12}})^{-4}$.

122 1) $9^{\frac{2}{5}} \cdot 27^{\frac{2}{5}}$; 2) $7^{\frac{2}{3}} \cdot 49^{\frac{2}{3}}$; 3) $144^{\frac{3}{4}} : 9^{\frac{3}{4}}$; 4) $150^{\frac{3}{2}} : 6^{\frac{3}{2}}$.

123 1) $\left(\frac{1}{16}\right)^{-0,75} + \left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{4}{3}}$; 2) $(0,04)^{-1,5} - (0,125)^{-\frac{2}{3}}$;

3) $8^{\frac{9}{7}} : 8^{\frac{2}{7}} - 3^{\frac{6}{5}} \cdot 3^{\frac{4}{5}}$; 4) $\left(5^{-\frac{2}{5}}\right)^{-5} + \left((0,2)^{\frac{3}{4}}\right)^{-4}$.

124 Найти значение выражения:

1) $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[6]{a}$ при $a = 0,09$; 2) $\sqrt{b} : \sqrt[6]{b}$ при $b = 27$;

3) $\dfrac{\sqrt{b}\sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[6]{b}}$ при $b = 1,3$; 4) $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[4]{a} \cdot \sqrt[12]{a^5}$ при $a = 2,7$.

125 Представить в виде степени с рациональным показателем:

1) $a^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt{a}$; 2) $b^{\frac{1}{2}} \cdot b^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[6]{b}$; 3) $\sqrt[3]{b} : b^{\frac{1}{6}}$;

4) $a^{\frac{4}{3}} : \sqrt[3]{a}$; 5) $x^{1,7} \cdot x^{2,8} : \sqrt{x^5}$; 6) $y^{-3,8} : y^{-2,3} \cdot \sqrt{y^3}$.

126 Вычислить:

1) $2^{2-3\sqrt{5}} \cdot 8^{\sqrt{5}}$; 2) $3^{1+2\sqrt[3]{2}} : 9^{\sqrt[3]{2}}$;

3) $6^{1+2\sqrt{3}} : (4^{\sqrt{3}} \cdot 9^{\sqrt{3}})$; 4) $(5^{1+\sqrt{2}})^{1-\sqrt{2}}$.

Упростить выражение (127—128).

127 1) $(a^4)^{-\frac{3}{4}} \cdot \left(b^{-\frac{2}{3}}\right)^{-6}$; 2) $\left(\left(\frac{a^6}{b^{-3}}\right)^4\right)^{\frac{1}{12}}$;

3) $(\sqrt{x^{0,4} \cdot y^{1,2}})^{10}$; 4) $x^{-2\sqrt{2}} \cdot \left(\frac{1}{x^{-\sqrt{2}-1}}\right)^{\sqrt{2}+1}$.

128 1) $\dfrac{a^{\frac{4}{3}}\left(a^{-\frac{1}{3}} + a^{\frac{2}{3}}\right)}{a^{\frac{1}{4}}\left(a^{\frac{3}{4}} + a^{-\frac{1}{4}}\right)}$; 2) $\dfrac{b^{\frac{1}{5}}(\sqrt[5]{b^4} - \sqrt[5]{b^{-1}})}{b^{\frac{2}{3}}(\sqrt[3]{b} - \sqrt[3]{b^{-2}})}$;

3) $\dfrac{a^{\frac{5}{3}}b^{-1} - ab^{-\frac{1}{3}}}{\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{b^2}}$; 4) $\dfrac{a^{\frac{1}{3}}\sqrt{b} + b^{\frac{1}{3}}\sqrt{a}}{\sqrt[6]{a} + \sqrt[6]{b}}$.

129 Вычислить:

1) $\left(2^{\frac{5}{3}} \cdot 3^{-\frac{1}{3}} - 3^{\frac{5}{3}} \cdot 2^{-\frac{1}{3}}\right) \cdot \sqrt[3]{6}$; 2) $\left(5^{\frac{1}{4}} : 2^{\frac{3}{4}} - 2^{\frac{1}{4}} : 5^{\frac{3}{4}}\right)\sqrt[4]{1000}$;

3) $(2^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} + (3^{\sqrt{3}+1})^{\sqrt{3}-1}$; 4) $\left((0,5)^{\frac{3}{5}}\right)^{-5} - (4^{-0,3})^{-\frac{5}{3}}$.

130 Упростить выражение:

1) $a^{\frac{1}{9}}\sqrt[6]{a\sqrt[3]{a}}$; 2) $\left(\sqrt[3]{ab^{-2}}+(ab)^{-\frac{1}{6}}\right)\sqrt[6]{ab^4}$;

3) $b^{\frac{1}{12}}\sqrt[3]{b\sqrt[4]{b}}$; 4) $(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b})\left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}-\sqrt[3]{ab}\right)$.

131 Сократить дробь:

1) $\dfrac{x-y}{x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}}$; 2) $\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a^{\frac{1}{4}}-b^{\frac{1}{4}}}$;

3) $\dfrac{m^{\frac{1}{2}}+n^{\frac{1}{2}}}{m+2\sqrt{mn}+n}$; 4) $\dfrac{c-2c^{\frac{1}{2}}+1}{\sqrt{c}-1}$.

Упростить выражение (**132—134**).

132 1) $\left(1-2\sqrt{\dfrac{b}{a}}+\dfrac{b}{a}\right):\left(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}\right)^2$;

2) $\left(a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}\right):\left(2+\sqrt[3]{\dfrac{a}{b}}+\sqrt[3]{\dfrac{b}{a}}\right)$;

3) $\dfrac{a^{\frac{1}{4}}-a^{\frac{9}{4}}}{a^{\frac{1}{4}}-a^{\frac{5}{4}}}-\dfrac{b^{-\frac{1}{2}}-b^{\frac{3}{2}}}{b^{\frac{1}{2}}+b^{-\frac{1}{2}}}$; 4) $\dfrac{\sqrt{a}-a^{-\frac{1}{2}}b}{1-\sqrt{a^{-1}b}}-\dfrac{\sqrt[3]{a^2}-a^{-\frac{1}{3}}b}{\sqrt[6]{a}+a^{-\frac{1}{3}}\sqrt{b}}$.

133 1) $\dfrac{a^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\dfrac{ab^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{b}-\sqrt{a}}-\dfrac{2a^2-4ab}{a-b}$;

2) $\dfrac{3xy-y^2}{x-y}-\dfrac{y\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}-\dfrac{y\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$;

3) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}-\dfrac{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}{a^{\frac{2}{3}}-\sqrt[3]{ab}+b^{\frac{2}{3}}}$; 4) $\dfrac{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}-\dfrac{a-b}{a^{\frac{2}{3}}+\sqrt[3]{ab}+b^{\frac{2}{3}}}$.

134 1) $\dfrac{a-b}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}-\dfrac{a+b}{a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}}$;

2) $\dfrac{a+b}{a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}}-\dfrac{a-b}{a^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}}$;

3) $\dfrac{a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}}{a-b}-\dfrac{1}{a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}}}$; 4) $\dfrac{a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}}}{a+b}+\dfrac{1}{a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}}$.

135 Вычислить на микрокалькуляторе с точностью до 0,01:

1) $\sqrt[3]{3}+\sqrt[4]{4}$; 2) $\sqrt[3]{7+\sqrt[5]{10}}$; 3) $5^{\sqrt{3}}$; 4) $(\sqrt[3]{2})^{\sqrt{3}}$; 5) π^{π}.

§ 11 Возведение в степень числового неравенства

В курсе алгебры VIII класса было доказано, что при умножении неравенств одинакового знака, у которых левые и правые части положительны, получается неравенство того же знака.

Отсюда следует, что если $a > b > 0$ и n — натуральное число, то $a^n > b^n$.

По условию $a > 0$, $b > 0$. Перемножая n одинаковых неравенств $a > b$, получаем $a^n > b^n$.

Задача 1 Сравнить числа $(0,43)^5$ и $\left(\frac{3}{7}\right)^5$.

Так как $\frac{3}{7} \approx 0,428$ с точностью до 0,001, то $0,43 > \frac{3}{7}$. Поэтому $(0,43)^5 > \left(\frac{3}{7}\right)^5$.

Неравенство, у которого левая и правая части положительны, можно возводить в отличную от нуля рациональную степень:

если $a > b > 0$, $r > 0$, то $a^r > b^r$; (1)

если $a > b > 0$, $r < 0$, то $a^r < b^r$. (2)

Докажем свойство (1).

Докажем сначала, что свойство (1) верно при $r = \frac{1}{n}$, а затем в общем случае при $r = \frac{m}{n}$.

1) Пусть $r = \frac{1}{n}$, где n — натуральное число, большее 1, $a > 0$, $b > 0$. По условию $a > b$. Нужно доказать, что $a^{\frac{1}{n}} > b^{\frac{1}{n}}$. Предположим, что это неверно, т. е. $a^{\frac{1}{n}} \leqslant b^{\frac{1}{n}}$. Но тогда, возводя это неравенство в натуральную степень n, получим $a \leqslant b$, что противоречит условию $a > b$. Итак, из $a > b > 0$ следует, что $a^{\frac{1}{n}} > b^{\frac{1}{n}}$.

2) Пусть $r = \frac{m}{n}$, где m и n — натуральные числа. Тогда по доказанному из условия $a > b > 0$ следует, что $a^{\frac{1}{n}} > b^{\frac{1}{n}}$. Возведя это неравенство в натуральную степень m, получаем $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m > \left(b^{\frac{1}{n}}\right)^m$, т. е. $a^{\frac{m}{n}} > b^{\frac{m}{n}}$. ○

Например, $5^{\frac{2}{7}} > 3^{\frac{2}{7}}$, так как $5 > 3$ и $\frac{2}{7} > 0$.

Теперь докажем свойство (2).

● Если $r < 0$, то $-r > 0$. По свойству (1) из условия $a > b > 0$ следует, что $a^{-r} > b^{-r}$. Умножая обе части этого неравенства на положительное число $a^r b^r$, получаем $b^r > a^r$, т. е. $a^r < b^r$. ○

Например, $(0{,}7)^{-8} < (0{,}6)^{-8}$, так как $0{,}7 > 0{,}6$, а $-8 < 0$.

В курсе высшей математики доказывается, что свойство (1) справедливо для любого положительного действительного числа r, а свойство (2) — для любого отрицательного действительного числа r.

Например, $\left(\frac{8}{9}\right)^{\sqrt{2}} > \left(\frac{7}{8}\right)^{\sqrt{2}}$, так как $\frac{8}{9} > \frac{7}{8}$, а $\sqrt{2} > 0$,

$\left(\frac{7}{8}\right)^{-\sqrt{3}} < \left(\frac{6}{7}\right)^{-\sqrt{3}}$, так как $\frac{7}{8} > \frac{6}{7}$, а $-\sqrt{3} < 0$.

Отметим, что рассмотренные свойства возведения в степень строгих неравенств (со знаком $>$ или $<$) справедливы и для нестрогих неравенств (со знаком $\geqslant$ или $\leqslant$).

Итак, если обе части неравенства положительны, то при возведении его *в положительную степень* знак неравенства *сохраняется*, а при возведении *в отрицательную степень* знак неравенства *меняется на противоположный*.

Напомним, что для строгих неравенств *противоположными* считаются знаки $>$ и $<$, а для нестрогих — знаки $\geqslant$ и $\leqslant$.

Задача 2 Сравнить числа:

1) $\left(\frac{17}{18}\right)^{-\frac{1}{3}}$ и $\left(\frac{18}{17}\right)^{-\frac{1}{3}}$; 2) $\left(\frac{6}{7}\right)^{\sqrt{2}}$ и $(0{,}86)^{\sqrt{2}}$.

▶ 1) Так как $\frac{17}{18}<1$, а $\frac{18}{17}>1$, то $\frac{17}{18}<\frac{18}{17}$. Возведя это неравенство в отрицательную степень $\left(-\frac{1}{3}\right)$, получаем

$$\left(\frac{17}{18}\right)^{-\frac{1}{3}}>\left(\frac{18}{17}\right)^{-\frac{1}{3}}.$$

2) Сравним основания степени. Так как $\frac{6}{7}=0{,}857...$, то $\frac{6}{7}<0{,}86$. Возведя это неравенство в положительную степень $\sqrt{2}$, получаем $\left(\frac{6}{7}\right)^{\sqrt{2}}<(0{,}86)^{\sqrt{2}}$. ◁

Задача 3 Решить уравнение $10^x=1$.

▶ Число $x=0$ является корнем этого уравнения, так как $10^0=1$. Покажем, что других корней нет. Запишем данное уравнение в виде $10^x=1^x$.

Если $x>0$, то $10^x>1^x$, и, следовательно, уравнение не имеет положительных корней.

Если $x<0$, то $10^x<1^x$, и, следовательно, уравнение не имеет отрицательных корней. Таким образом, $x=0$ — единственный корень уравнения $10^x=1$. ◁

Аналогично доказывается, что уравнение $a^x=1$, где $a>0$, $a\neq 1$, имеет единственный корень $x=0$.

Равенство

$$a^x=a^y, \qquad (3)$$

где $a>0$, $a\neq 1$, *верно только при* $x=y$.

● Умножая равенство (3) на a^{-y}, получаем $a^{x-y}=1$, откуда $x=y$. ○

Задача 4 Решить уравнение $3^{2x-1}=9$.

▶ $3^{2x-1}=3^2$, откуда $2x-1=2$, $x=1{,}5$.

Ответ $x=1{,}5$. ◁

Рассмотрим уравнение

$$a^x=b,$$

где $a>0$, $a\neq 1$, $b>0$.

Можно доказать, что это уравнение имеет единственный корень x_0. Число x_0 называют *логарифмом числа b по основанию a* и обозначают $\log_a b$. Например, корнем уравнения $3^x=9$ является число 2, т. е. $\log_3 9 = 2$. Точно так же $\log_2 16 = 4$, так как $2^4 = 16$; $\log_5 \frac{1}{5} = -1$, так как $5^{-1} = \frac{1}{5}$; $\log_{\frac{1}{3}} 27 = -3$, так как $\left(\frac{1}{3}\right)^{-3} = 27$.

Логарифм числа b по основанию 10 называют *десятичным логарифмом* и обозначают $\lg b$. Например, $\lg 100 = 2$, так как $10^2 = 100$; $\lg 0{,}001 = -3$, так как $10^{-3} = 0{,}001$.

Задача 5 С помощью микрокалькулятора решить уравнение $10^{3x+1} = 5$ (с точностью до 0,1).

▶ $3x + 1 = \lg 5$, откуда $x = \frac{1}{3}(\lg 5 - 1)$.

Вычисления проведём по программе:

$$5 \boxed{\lg} \boxed{-} 1 \boxed{\div} 3 \boxed{=} \underline{-0{,}1003433}.$$

Ответ $x \approx -0{,}1$. ◁

Упражнения

136 (Устно.) Сравнить числа:

1) $2^{\frac{1}{3}}$ и $3^{\frac{1}{3}}$; 2) $5^{-\frac{4}{5}}$ и $3^{-\frac{4}{5}}$;

3) $5^{\sqrt{3}}$ и $7^{\sqrt{3}}$; 4) $21^{-\sqrt{2}}$ и $31^{-\sqrt{2}}$.

137 Сравнить числа:

1) $(0{,}88)^{\frac{1}{6}}$ и $\left(\frac{6}{11}\right)^{\frac{1}{6}}$; 2) $\left(\frac{5}{12}\right)^{-\frac{1}{4}}$ и $(0{,}41)^{-\frac{1}{4}}$;

3) $(4{,}09)^{\sqrt[3]{2}}$ и $\left(4\frac{3}{25}\right)^{\sqrt[3]{2}}$; 4) $\left(\frac{11}{12}\right)^{-\sqrt{5}}$ и $\left(\frac{12}{13}\right)^{-\sqrt{5}}$.

138 Решить уравнение:

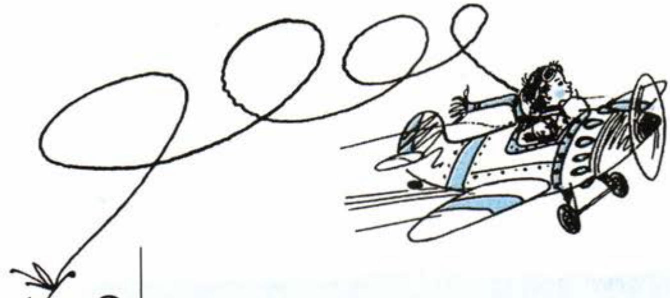
1) $6^{2x} = 6^{\frac{1}{5}}$; 2) $3^x = 27$; 3) $7^{1-3x} = 7^{10}$;

4) $2^{2x+1} = 32$; 5) $4^{2+x} = 1$; 6) $\left(\frac{1}{5}\right)^{4x-3} = 5$.

139 Сравнить числа:

1) $\sqrt[7]{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)^2}$ и $\sqrt[7]{\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right)^2}$;

2) $\sqrt[5]{\left(1\frac{1}{4} - 1\frac{1}{5}\right)^3}$ и $\sqrt[5]{\left(1\frac{1}{6} - 1\frac{1}{7}\right)^3}$.



№ 3

ТРЕМЯ ОДИНАКОВЫМИ ЦИФРАМИ ЗАПИСАТЬ ВОЗМОЖНО БОЛЬШЕЕ ЧИСЛО.

Решить уравнение **(140—142)**.

140 1) $3^{2-y}=27$; 2) $3^{5-2x}=1$;

3) $9^{\frac{1}{2}x-1}-3=0$; 4) $27^{3-\frac{1}{3}y}-81=0$.

141 1) $\left(\frac{1}{9}\right)^{2x-5}=3^{5x-8}$; 2) $2^{4x-9}=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-4}$;

3) $8^x 4^{x+13}=\frac{1}{16}$; 4) $\frac{25^{x-2}}{\sqrt{5}}=\left(\frac{1}{5}\right)^{x-7,5}$.

142 1) $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{2x+1}=(3\sqrt{3})^x$; 2) $(\sqrt[3]{2})^{x-1}=\left(\frac{2}{\sqrt[3]{2}}\right)^{2x}$;

3) $9^{3x+4}\sqrt{3}=\frac{27^{x-1}}{\sqrt{3}}$; 4) $\frac{8}{(\sqrt{2})^x}=4^{3x-2}\sqrt{2}$.

143 Вычислить:

1) $\log_7 49$; 2) $\log_2 64$; 3) $\log_{\frac{1}{2}} 4$; 4) $\log_3 \frac{1}{27}$.

144 Вычислить на микрокалькуляторе с точностью до 0,1:

1) $\lg 23$; 2) $\lg 131$; 3) $40\lg 2$; 4) $57\lg 3$.

145 С помощью микрокалькулятора найти с точностью до 0,01 корень уравнения:

1) $10^{2x-1}=7$; 2) $10^{1-3x}=6$.

Упражнения к главе II

146 Вычислить:

1) $(0{,}175)^0 + (0{,}36)^{-2} - 1^{\frac{4}{3}}$; 2) $1^{-0{,}43} - (0{,}008)^{-\frac{1}{3}} + (15{,}1)^0$;

3) $\left(\frac{4}{5}\right)^{-2} - \left(\frac{1}{27}\right)^{\frac{1}{3}} + 4 \cdot 379^0$; 4) $(0{,}125)^{-\frac{1}{3}} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 - (1{,}85)^0$.

147 Вычислить:

1) $9{,}3 \cdot 10^{-6} : (3{,}1 \cdot 10^{-5})$; 2) $1{,}7 \cdot 10^{-6} \cdot 3 \cdot 10^7$;

3) $8{,}1 \cdot 10^{16} \cdot 2 \cdot 10^{-14}$; 4) $6{,}4 \cdot 10^5 : (1{,}6 \cdot 10^7)$;

5) $2 \cdot 10^{-1} + \left(6^0 - \frac{1}{6}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)^{-1}$;

6) $3 \cdot 10^{-1} - \left(8^0 - \frac{1}{8}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{-3} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^4 \cdot \left(\frac{5}{7}\right)^{-1}$.

148 Найти значение выражения:

1) $\left(\dfrac{x^{\frac{1}{3}} \cdot x^{\frac{5}{6}}}{x^{\frac{1}{6}}}\right)^{-2}$ при $x = \frac{7}{9}$; 2) $\left(\dfrac{a^{\frac{2}{3}} \cdot a^{\frac{1}{9}}}{a^{-\frac{2}{9}}}\right)^{-3}$ при $a = 0{,}1$.

149 Упростить выражение:

1) $(\sqrt[3]{125x} - \sqrt[3]{8x}) - (\sqrt[3]{27x} - \sqrt[3]{64x})$;

2) $(\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{16x}) + (\sqrt[4]{81x} - \sqrt[4]{625x})$;

3) $\left(\dfrac{3}{\sqrt{1+a}} + \sqrt{1-a}\right) : \dfrac{3 + \sqrt{1-a^2}}{\sqrt{1+a}}$;

4) $\left(1 - \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - y^2}}\right) : (\sqrt{x^2 - y^2} - x)$.

150 Решить уравнение:

1) $7^{5x-1} = 49$; 2) $(0{,}2)^{1-x} = 0{,}04$;

3) $\left(\frac{1}{7}\right)^{3x+3} = 7^{2x}$; 4) $3^{5x-7} = \left(\frac{1}{3}\right)^{2x}$.

Проверь себя!

1 Вычислить:

1) $3^{-5} : 3^{-7} - 2^{-2} \cdot 2^4 + \left(\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}\right)^3$; 2) $\sqrt[5]{3^{10} \cdot 32} - \frac{\sqrt[3]{48}}{\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{3}}$;

3) $25^{\frac{3}{2}} \cdot 25^{-1} + (5^3)^{\frac{2}{3}} : 5^3 - 48^{\frac{2}{3}} : 6^{\frac{2}{3}}$.

2 Записать числа 8600 и 0,0078 в стандартном виде и найти их произведение и частное.

3 Упростить выражение:

1) $\frac{3x^{-9} \cdot 2x^5}{x^{-4}}$; 2) $(x^{-1}+y^{-1}) \cdot \left(\frac{1}{xy}\right)^{-2}$.

4 Упростить выражение $\frac{a^{\frac{5}{3}}}{\sqrt[3]{a^2} \cdot a^{\frac{1}{4}}}$ и найти его числовое значение при $a = 81$.

5 Сравнить числа:

$(0{,}78)^{\frac{2}{3}}$ и $(0{,}67)^{\frac{2}{3}}$; $(3{,}09)^{-\frac{1}{3}}$ и $(3{,}08)^{-\frac{1}{3}}$.

151 Вычислить:

1) $\left(\frac{1}{16}\right)^{-0{,}75} + 10\,000^{0{,}25} - \left(7\frac{19}{32}\right)^{\frac{1}{5}}$;

2) $(0{,}001)^{-\frac{1}{3}} - 2^{-2} \cdot 64^{\frac{2}{3}} - 8^{-1\frac{1}{3}}$;

3) $27^{\frac{2}{3}} - (-2)^{-2} + \left(3\frac{3}{8}\right)^{-\frac{1}{3}}$;

4) $(-0{,}5)^{-4} - 625 - \left(2\frac{1}{4}\right)^{-1\frac{1}{2}}$.

152 При каких значениях x имеет смысл выражение:

1) $\sqrt[4]{x^2-4}$; 2) $\sqrt[3]{x^2-5x+6}$; 3) $\sqrt[6]{\frac{x-2}{x+3}}$;

4) $\sqrt[4]{x^2-5x+6}$; 5) $\sqrt[8]{x^3-x}$; 6) $\sqrt[6]{x^3-5x^2+6x}$?

153 Упростить выражение:

1) $\frac{a^{\frac{1}{4}} - a^{-\frac{7}{4}}}{a^{\frac{1}{4}} - a^{-\frac{3}{4}}}$; 2) $\frac{a^{\frac{4}{3}} - a^{-\frac{2}{3}}}{a^{\frac{1}{3}} - a^{-\frac{2}{3}}}$;

3) $\dfrac{b^{\frac{5}{4}}+2b^{\frac{1}{4}}+b^{-\frac{3}{4}}}{b^{\frac{3}{4}}+b^{-\frac{1}{4}}}$; 4) $\dfrac{a^{-\frac{4}{3}}b^{-2}-a^{-2}b^{-\frac{4}{3}}}{a^{-\frac{5}{3}}b^{-2}-b^{-\frac{5}{3}}a^{-2}}$;

5) $\dfrac{\sqrt{a^3b^{-1}}-\sqrt{a^{-1}b^3}}{\sqrt{ab^{-1}}-\sqrt{a^{-1}b}}$; 6) $\dfrac{a^{\frac{3}{4}}b^{-\frac{1}{4}}-a^{-\frac{1}{4}}b^{\frac{3}{4}}}{a^{\frac{1}{4}}b^{-\frac{1}{4}}+a^{-\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{4}}}$;

7) $\left(\dfrac{1+\sqrt{ab}}{\sqrt[4]{ab}}+\dfrac{\sqrt[4]{a^3b}-\sqrt[4]{ab^3}}{\sqrt{b}-\sqrt{a}}\right)^{-2}\cdot\left(1+\dfrac{b}{a}+2\sqrt{\dfrac{b}{a}}\right)^{\frac{1}{2}}$;

8) $\left(\dfrac{a+b}{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{b^2}}+\dfrac{\sqrt[3]{ab^2}-\sqrt[3]{a^2b}}{\sqrt[3]{a^2}-2\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}\right):(\sqrt[6]{a}-\sqrt[6]{b})$.

154 Сравнить ребро куба объёмом 100 см^3 с радиусом шара такого же объёма. (Объём шара радиуса R вычисляется по формуле $V=\dfrac{4}{3}\pi R^3$.)

155 С помощью микрокалькулятора вычислить период колебаний маятника длиной 18,5 см по формуле $T=2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$, где l — длина маятника (в метрах), $g\approx 9{,}8$ м/с^2, T — период колебаний маятника (в секундах).

III
глава

Степенная функция

§ 12 Область определения функции

Если каждому значению x из некоторого множества чисел поставлено в соответствие число y, то говорят, что на этом множестве задана *функция* $y(x)$. При этом x называют *независимой переменной* или *аргументом*, а y — *зависимой переменной* или *функцией*.

Вы знакомы с линейной функцией $y = kx + b$ и квадратичной функцией $y = ax^2 + bx + c$.
Для этих функций значение аргумента может быть любым действительным числом.
Рассмотрим теперь функцию, которая каждому неотрицательному числу x сопоставляет число $\sqrt{x}$, т. е. функцию $y = \sqrt{x}$. Для этой функции аргумент может принимать только неотрицательные значения: $x \geqslant 0$. В этом случае говорят, что функция определена на множестве всех неотрицательных чисел, и это множество называют областью определения функции $y = \sqrt{x}$.

Вообще *областью определения* функции называют множество всех значений, которые может принимать её аргумент.

Например, функция, заданная формулой $y = \frac{1}{x}$, определена при $x \neq 0$, т. е. область определения этой функции — множество всех действительных чисел, отличных от нуля.

Если функция задана формулой, то принято считать, что она определена при всех тех значениях аргумента, при которых эта формула имеет смысл, т. е. выполнимы все действия, указанные в выражении, стоящем в правой части формулы.

Найти область определения функции, заданной формулой, — это значит найти все значения аргумента, при которых формула имеет смысл.

Задача 1 Найти область определения функции:

1) $y(x)=2x^2+3x+5$; 2) $y(x)=\sqrt{x-1}$;

3) $y(x)=\dfrac{1}{x+2}$; 4) $y(x)=\sqrt[4]{\dfrac{x+2}{x-2}}$.

▶ 1) Так как выражение $2x^2+3x+5$ имеет смысл при любом x, то функция определена при всех x.

Ответ x — любое число.

2) Выражение $\sqrt{x-1}$ имеет смысл при $x-1 \geqslant 0$, т. е. функция определена при $x \geqslant 1$.

Ответ $x \geqslant 1$.

3) Выражение $\dfrac{1}{x+2}$ имеет смысл при $x+2 \neq 0$, т. е. функция определена при $x \neq -2$.

Ответ $x \neq -2$.

Рис. 1

4) Выражение $\sqrt[4]{\dfrac{x+2}{x-2}}$ имеет смысл при $\dfrac{x+2}{x-2} \geqslant 0$. Решая это неравенство, получаем (рис. 1): $x \leqslant -2$ и $x > 2$, т. е. функция определена при $x \leqslant -2$ и при $x > 2$.

Ответ $x \leqslant -2$, $x > 2$. ◁

Напомним, что *графиком функции* называется множество всех точек координатной плоскости, абсциссы которых равны значениям независимой переменной из области определения этой функции, а ординаты — соответствующим значениям функции.

Задача 2 Построить график функции $y=|x|$.

▶ Известно, что $|x|=\begin{cases} x, & \text{если } x \geqslant 0, \\ -x, & \text{если } x<0. \end{cases}$

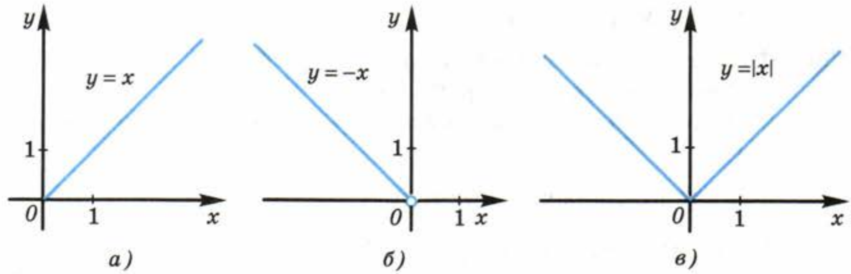


Рис. 2

Таким образом, выражение $|x|$ имеет смысл при любом действительном значении x, т. е. областью определения функции $y = |x|$ является множество всех действительных чисел.
Если $x \geqslant 0$, то $|x| = x$, и поэтому при $x \geqslant 0$ графиком является биссектриса первого координатного угла (рис. 2, *а*). Если $x < 0$, то $|x| = -x$, и графиком функции $y = |x|$ является биссектриса второго координатного угла (рис. 2, *б*). График функции изображён на рисунке 2, *в*. ◁
Заметим, что $|-x| = |x|$ для любого x, поэтому график функции $y = |x|$ симметричен относительно оси ординат.

Задача 3* Построить график функции $y = |x - 2| - 1$.

▶ График функции $y = |x - 2|$ получается из графика функции $y = |x|$ сдвигом вдоль оси Ox на 2 единицы вправо (рис. 3, *а*).
Для получения графика функции $y = |x - 2| - 1$ достаточно сдвинуть график функции $y = |x - 2|$ на единицу вниз (рис. 3, *б*). ◁

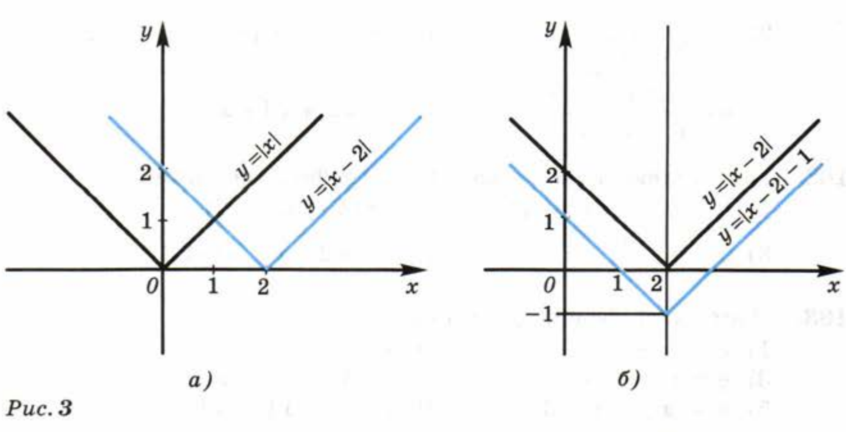


Рис. 3

Упражнения

156 Функция задана формулой $y(x) = x^2 - 4x + 5$.
1) Найти $y(-3)$, $y(-1)$, $y(0)$, $y(2)$.
2) Найти значение x, если $y(x) = 1$, $y(x) = 5$, $y(x) = 10$, $y(x) = 17$.

157 Функция задана формулой $y(x) = \frac{x+5}{x-1}$.
1) Найти $y(-2)$, $y(0)$, $y\left(\frac{1}{2}\right)$, $y(3)$.
2) Найти значение x, если $y(x) = -3$, $y(x) = -2$, $y(x) = 13$, $y(x) = 19$.

Найти область определения функции (158—159).

158 (Устно.) 1) $y = 4x^2 - 5x + 1$; 2) $y = 2 - x - 3x^2$;
3) $y = \frac{2x-3}{x-3}$; 4) $y = \frac{3}{5-x^2}$;
5) $y = \sqrt[4]{6-x}$; 6) $y = \sqrt{\frac{1}{x+7}}$.

159 1) $y = \frac{2x}{x^2-2x-3}$; 2) $y = \sqrt[6]{x^2-7x+10}$;
3) $y = \sqrt[3]{3x^2-2x+5}$; 4) $y = \sqrt[6]{\frac{2x+4}{3-x}}$.

160 Функция задана формулой $y(x) = |2 - x| - 2$.
1) Найти $y(-3)$, $y(-1)$, $y(1)$, $y(3)$.
2) Найти значение x, если $y(x) = -2$, $y(x) = 0$, $y(x) = 2$, $y(x) = 4$.

161 Найти область определения функции:
1) $y = \sqrt{\frac{x^2-4}{x+3}}$; 2) $y = \sqrt[4]{(x-1)(x-2)(x-3)}$;
3) $y = \sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}}$; 4) $y = \sqrt{(x+1)(x-1)(x-4)}$;
5) $y = \sqrt[8]{\frac{x^2+4x-5}{x-2}}$; 6) $y = \sqrt[6]{x} + \sqrt{1+x}$.

162 Принадлежит ли точка $(-2; 1)$ графику функции:
1) $y = 3x^2 + 2x + 29$; 2) $y = |4 - 3x| - 9$;
3) $y = \frac{x^2+3}{x-1}$; 4) $y = |\sqrt{2-x} - 5| - 2$?

163 Построить график функции:
1) $y = |x + 3| + 2$; 2) $y = -|x|$;
3) $y = 2|x| + 1$; 4) $y = 1 - |1 - 2x|$;
5) $y = |x| + |x - 2|$; 6) $y = |x + 1| - |x|$.

§ 13 Возрастание и убывание функции

Вы знакомы с функциями $y = x$ и $y = x^2$. Эти функции являются частными случаями *степенной функции*, т. е. функции

$$\boldsymbol{y = x^r}, \qquad (1)$$

где r — заданное число.

Степенная функция определена для тех значений x, при которых формула (1) имеет смысл. Например, областью определения функций $y = x$ и $y = x^2$ ($r = 1$ и $r = 2$) является множество всех действительных чисел; областью определения функции $y = \frac{1}{x}$ ($r = -1$) является множество всех действительных чисел, не равных нулю; областью определения функции $y = \sqrt{x}$ $\left(r = \frac{1}{2}\right)$ является множество всех неотрицательных чисел.

Функция $y(x)$ называется *возрастающей* на некотором промежутке, если для любых x_1, x_2, принадлежащих данному промежутку, таких, что $x_2 > x_1$, выполняется неравенство $y(x_2) > y(x_1)$.

Функция $y(x)$ называется *убывающей* на промежутке, если для любых x_1, x_2 из этого промежутка, таких, что $x_2 > x_1$, выполняется неравенство $y(x_2) < y(x_1)$.

Например, функция $y = x$ возрастает на всей числовой оси. Функция $y = x^2$ возрастает на промежутке $x \geqslant 0$, убывает на промежутке $x \leqslant 0$.

Поведение степенной функции $y = x^r$ зависит от знака показателя степени r.

Если $r > 0$, то степенная функция $y = x^r$ *возрастает* на промежутке $x \geqslant 0$.

● Пусть $x_2 > x_1 \geqslant 0$. Возводя неравенство $x_2 > x_1$ в положительную степень r, получаем $x_2^r > x_1^r$, т. е. $y(x_2) > y(x_1)$. ○

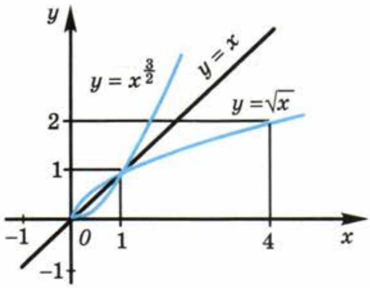


Рис. 4

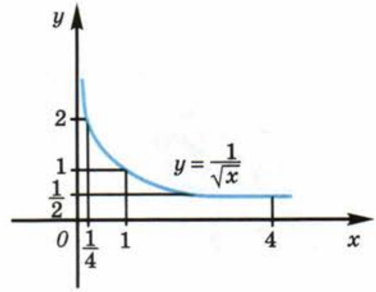


Рис. 5

Например, функции $y = \sqrt{x}$ и $y = x^{\frac{3}{2}}$ возрастают на промежутке $x \geqslant 0$. Графики этих функций изображены на рисунке 4, из которого видно, что график функции $y = \sqrt{x}$ на промежутке $0 < x < 1$ лежит выше графика функции $y = x$, а на промежутке $x > 1$ — ниже этого графика. Таким же свойством обладает график функции $y = x^r$, если $0 < r < 1$. График функции $y = x^{\frac{3}{2}}$ на промежутке $0 < x < 1$ лежит ниже графика функции $y = x$, а на промежутке $x > 1$ — выше графика функции $y = x$. Таким же свойством обладает график функции $y = x^r$, если $r > 1$.

Рассмотрим теперь *случай, когда* $r < 0$.

Если $r < 0$, то степенная функция $y = x^r$ *убывает* на промежутке $x > 0$.

Пусть $x_2 > x_1 > 0$. Возводя неравенство $x_2 > x_1$ в отрицательную степень r, по свойству неравенств, у которых левая и правая части положительны, получаем $x_2^r < x_1^r$, т. е. $y(x_2) < y(x_1)$.

Например, функция $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$, т. е. $y = x^{-\frac{1}{2}}$, убывает на промежутке $x > 0$. График этой функции изображён на рисунке 5.

Задача 1 Решить уравнение $x^{\frac{3}{4}} = 27$.

▶ Функция $y = x^{\frac{3}{4}}$ определена при $x \geqslant 0$. Поэтому данное уравнение может иметь только неотрицательные корни. Один такой корень: $x = 27^{\frac{4}{3}} = 3^4 =$

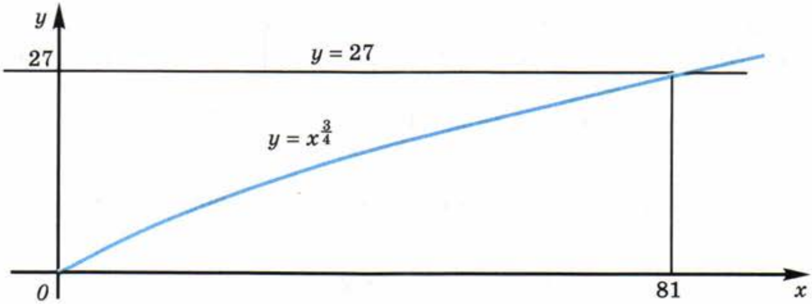


Рис. **6**

$= 81$. Других корней нет, так как функция $y = x^{\frac{3}{4}}$ возрастает при $x \geqslant 0$, и поэтому если $x > 81$, то $x^{\frac{3}{4}} > 27$, а если $x < 81$, то $x^{\frac{3}{4}} < 27$ (рис. 6). ◁

Аналогично доказывается, что уравнение $x^r = b$, где $r \neq 0$, $b > 0$, всегда имеет положительный корень $x = b^{\frac{1}{r}}$, причём только один. Следовательно, функция $y = x^r$, где $r > 0$, при $x > 0$ *принимает все положительные значения.*

Например, несмотря на медленное возрастание функции $y = x^{\frac{3}{4}}$ (см. рис. 6), её график как угодно далеко удалится от оси Ox и пересечёт прямую $y = b$, каким бы ни было положительное число b.

Заметим, что промежутки $x \geqslant a$, $x > a$, $x \leqslant a$, $x < a$ можно записывать как $[a; +\infty)$, $(a; +\infty)$, $(-\infty; a]$, $(-\infty; a)$ соответственно. Например, промежуток $[3; +\infty)$ содержит все значения $x \geqslant 3$, а промежуток $(-\infty; 5)$ значения $x < 5$.

Задача 2 Доказать, что функция $y = x + \frac{1}{x}$ возрастает на промежутке $(1; +\infty)$.

▶ Пусть $x_2 > x_1 > 1$. Покажем, что $y(x_2) > y(x_1)$. Рассмотрим разность $y(x_2) - y(x_1) = x_2 + \frac{1}{x_2} - \left(x_1 + \frac{1}{x_1}\right) = (x_2 - x_1)\frac{x_1 x_2 - 1}{x_1 x_2}$.

Так как $x_2 > x_1$, $x_1 > 1$, $x_2 > 1$, то $x_2 - x_1 > 0$; так как $x_1 x_2 > 1$, то $x_1 x_2 - 1 > 0$; $x_1 x_2 > 0$. Поэтому $y(x_2) - y(x_1) > 0$, т. е. $y(x_2) > y(x_1)$. ◁

Упражнения

164 Построить график и найти промежутки возрастания и убывания функции:

1) $y = 2x + 3$; 2) $y = 1 - 3x$; 3) $y = x^2 + 2$;
4) $y = 3 - x^2$; 5) $y = (1 - x)^2$; 6) $y = (2 + x)^2$.

165 (Устно.) Возрастает или убывает на промежутке $(0; +\infty)$ функция:

1) $y = x^{\frac{3}{7}}$; 2) $y = x^{-\frac{3}{4}}$; 3) $y = x^{-\sqrt{2}}$; 4) $y = x^{\sqrt{3}}$?

166 Нарисовать эскиз графика функции при $x > 0$:

1) $y = x^{\frac{3}{2}}$; 2) $y = x^{\frac{2}{3}}$; 3) $y = x^{-\frac{3}{2}}$; 4) $y = x^{-\frac{2}{3}}$.

167 Найти положительный корень уравнения:

1) $x^{\frac{1}{2}} = 3$; 2) $x^{\frac{1}{4}} = 2$; 3) $x^{-\frac{1}{4}} = 2$; 4) $x^{-\frac{4}{5}} = 81$.

168 Построить на миллиметровой бумаге график функции $y = \sqrt[4]{x}$. Найти по графику приближённо:

1) значения x, при которых $y = 0{,}5$; 1; 4; 2,5;

2) значения $\sqrt[4]{1{,}5}$; $\sqrt[4]{2}$; $\sqrt[4]{2{,}5}$; $\sqrt[4]{3}$.

169 Найти абсциссу точки пересечения графиков функций:

1) $y = x^{\frac{4}{3}}$ и $y = 625$; 2) $y = x^{\frac{6}{5}}$ и $y = 64$;

3) $y = x^{\frac{3}{2}}$ и $y = 216$; 4) $y = x^{\frac{7}{3}}$ и $y = 128$.

170 Доказать, что функция:

1) $y = x + \frac{1}{x}$ убывает на интервале $(0; 1)$;

2) $y = \frac{1}{x^2 + 1}$ убывает на промежутке $[0; +\infty)$ и возрастает на промежутке $(-\infty; 0]$;

3) $y = x^3 - 3x$ возрастает на промежутках $(-\infty; -1]$ и $[1; +\infty)$, убывает на отрезке $[-1; 1]$;

4) $y = x - 2\sqrt{x}$ возрастает на промежутке $[1; +\infty)$ и убывает на отрезке $[0; 1]$.

171 Построить график и найти промежутки возрастания и убывания функции:

1) $y = \begin{cases} x + 2, & \text{если } x \leqslant -1, \\ x^2, & \text{если } x > -1; \end{cases}$ 2) $y = \begin{cases} x^2, & \text{если } x \leqslant 1, \\ 2 - x^2, & \text{если } x > 1. \end{cases}$

§ 14 Чётность и нечётность функции

Функция $y(x)$ называется *чётной*, если область её определения симметрична относительно начала координат и

$$y(-x) = y(x)$$

для любого x из области определения этой функции.

Например, чётными являются функции $y = x^2$ и $y = |x|$. Графики этих функций симметричны относительно оси ординат (рис. 7 и 8).

Задача 1 Построить график функции $y = x^3$.

1) Область определения функции $y = x^3$ — множество всех действительных чисел.

2) Значения функции $y = x^3$ положительны при $x > 0$; отрицательны при $x < 0$; $y = 0$ при $x = 0$.

3) Докажем, что график функции $y = x^3$ симметричен относительно начала координат.

Пусть точка $(x_0; y_0)$ принадлежит графику функции $y = x^3$, т. е. $y_0 = x_0^3$. Точка, симметричная точке $(x_0; y_0)$ относительно начала координат, имеет

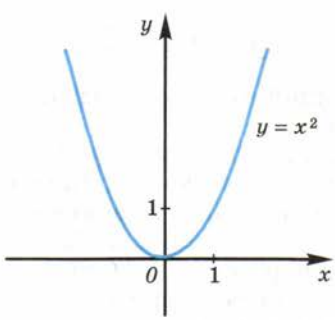


Рис. 7

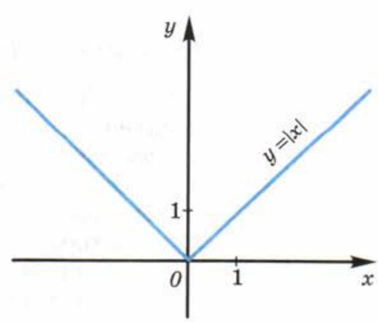


Рис. 8

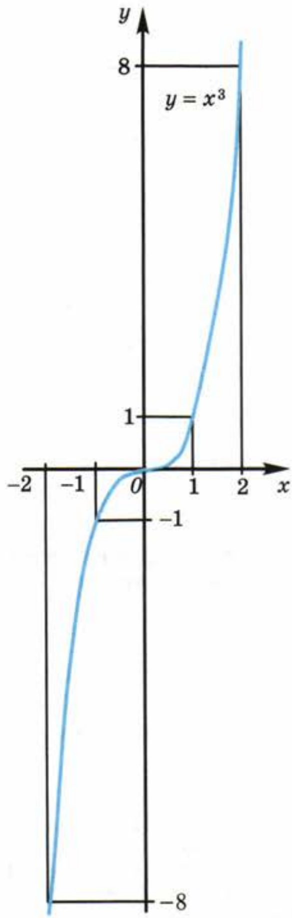


Рис. **9**

координаты $(-x_0; -y_0)$. Эта точка также принадлежит графику функции $y = x^3$, так как, умножая обе части верного равенства $y_0 = x_0^3$ на -1, получаем $-y_0 = -x_0^3$, или $-y_0 = (-x_0)^3$. ○

Это свойство позволяет для построения графика функции $y = x^3$ построить сначала график для $x \geqslant 0$, а затем отразить его симметрично относительно начала координат.

4) Функция $y = x^3$ возрастает на всей области определения. Это следует из свойства возрастания степенной функции с положительным показателем при $x \geqslant 0$ и симметрии графика относительно начала координат.

5) Составив таблицу значений функции $y = x^3$ для некоторых значений $x \geqslant 0$ (например, для $x = 0, 1, 2, 3$), построим часть графика при $x \geqslant 0$ и затем с помощью симметрии — ту его часть, которая соответствует отрицательным значениям x (рис. 9). ◁

Функция $y(x)$ называется *нечётной*, если область её определения симметрична относительно начала координат и

$$y(-x) = -y(x)$$

для любого x из области определения этой функции.

Например, функции $y = x^3$, $y = x^5$, $y = \frac{1}{x^3}$ нечётные. Графики этих функций симметричны относительно начала координат.

Существуют функции, которые не обладают свойствами чётности или нечётности. Например, покажем, что функция $y = 2x + 1$ не является чётной и не является нечётной. Если бы эта функция была чётной, то равенство $2(-x) + 1 = 2x + 1$ выполнялось бы для всех x; но, например, при $x = 1$ это равенство неверно: $-1 \neq 3$. Если бы эта функция была нечётной, то тогда при всех

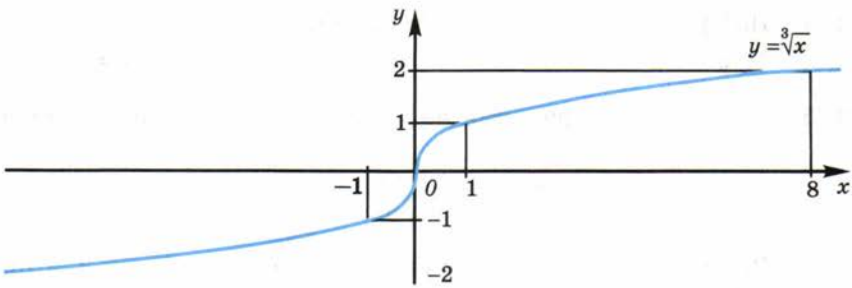


Рис. ***10***

x выполнялось бы равенство $2(-x) + 1 = -(2x + 1)$; но, например, при $x = 2$ это равенство неверно: $-3 \neq -5$.

Задача 2 Построить график функции $y = \sqrt[3]{x}$.

▶ 1) Область определения — все действительные числа.

2) Функция является нечётной, так как $\sqrt[3]{-x} = -\sqrt[3]{x}$ для любого x.

3) При $x \geqslant 0$ функция возрастает по свойству возрастания степенной функции с положительным показателем, так как $\sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$ при $x \geqslant 0$.

4) При $x > 0$ значения $y > 0$; $y(0) = 0$.

5) Найдя несколько точек, принадлежащих графику, построим часть графика для значений $x \geqslant 0$ и затем с помощью симметрии для значений $x < 0$ (рис. 10). ◁

Отметим, что функция $y = \sqrt[3]{x}$ определена при всех x, а функция $y = x^{\frac{1}{3}}$ — только при $x \geqslant 0$.

Упражнения

Выяснить, является ли функция чётной, нечётной или ни чётной, ни нечётной **(172—173)**.

172 1) $y = 2x^4$; 2) $y = 3x^5$; 3) $y = x^2 + 3$; 4) $y = x^3 - 2$.

173 1) $y = x^{-4}$; 2) $y = x^{-3}$; 3) $y = x^4 + x^2$; 4) $y = x^3 + x^5$; 5) $y = x^2 - x + 1$; 6) $y = \frac{1}{x+1}$.

174 Построить эскиз графика функции:

1) $y = x^4$; 2) $y = x^5$; 3) $y = -x^2 + 3$; 4) $y = \sqrt[5]{x}$.

175 Показать, что функция не является чётной и не является нечётной:

1) $y = \frac{x+2}{x-3}$; 2) $y = \frac{x^2 + x - 1}{x+4}$.

176 Выяснить, является ли функция чётной, нечётной или ни чётной, ни нечётной:

1) $y = x^4 + 2x^2 + 3$; 2) $y = x^3 + 2x + 1$;

3) $y = \frac{3}{x^3} + \sqrt[3]{x}$; 4) $y = x^4 + |x|$.

177 Используя симметрию, построить график чётной функции:

1) $y = x^2 - 2|x| + 1$; 2) $y = x^2 - 2|x|$.

178 Используя симметрию, построить график нечётной функции:

1) $y = x|x| - 2x$; 2) $y = x|x| + 2x$.

179 Выяснить свойства функции и построить её график:

1) $y = \sqrt{x-5}$; 2) $y = \sqrt{x} + 3$;

3) $y = x^4 + 2$; 4) $y = 1 - x^4$;

5) $y = (x+1)^3$; 6) $y = x^3 - 2$.

180 Построить график функции:

1) $y = \begin{cases} x^2, \text{ если } x \geqslant 0, \\ x^3, \text{ если } x < 0; \end{cases}$ 2) $y = \begin{cases} x^3, \text{ если } x > 0, \\ x^2, \text{ если } x \leqslant 0. \end{cases}$

Определить, при каких значениях аргумента значения функции положительны. Указать промежутки возрастания и убывания.

181 Построить график функции y при $x > 0$, если:

1) $y = x$; 2) $y = x^2$;

3) $y = x^2 + x$; 4) $y = x^2 - x$.

Достроить график каждой из функций для $x < 0$ так, чтобы построенная линия была графиком:

а) чётной функции;

б) нечётной функции.

Задать формулой каждую из полученных функций.

182 Записать уравнение оси симметрии графика функции:

1) $y = (x+1)^6$; 2) $y = x^6 + 1$.

183 Указать координаты центра симметрии графика функции:

1) $y = x^3 + 1$; 2) $y = (x+1)^3$.

§ 15 Функция $y = \frac{k}{x}$

Задача 1 Построить график функции $y = \frac{1}{x}$.

▶ 1) Область определения — все действительные числа, кроме нуля.

2) Функция является нечётной, так как $\frac{1}{-x} = -\frac{1}{x}$ при $x \neq 0$.

3) Функция убывает на промежутке $(0; +\infty)$ по свойству степенной функции с отрицательным показателем, так как $\frac{1}{x} = x^{-1}$.

4) При $x > 0$ функция принимает положительные значения.

5) Найдя несколько точек, принадлежащих графику, например точки $\left(\frac{1}{3}; 3\right)$, $\left(\frac{1}{2}; 2\right)$, $(1; 1)$, $\left(2; \frac{1}{2}\right)$, построим часть графика для значений $x > 0$ и затем с помощью симметрии — его часть для значений $x < 0$ (рис. 11). ◁

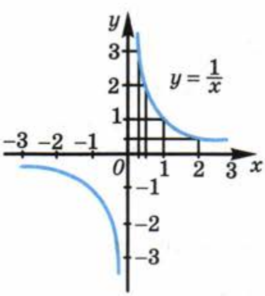


Рис. 11

График функции $y = \frac{1}{x}$ называют *гиперболой*. Она состоит из двух частей, называемых *ветвями гиперболы*. Одна ветвь расположена в первом квадранте, а другая — в третьем.

Задача 2 Построить график функции $y = \frac{k}{x}$ при $k = 2$ и $k = -2$.

▶ Заметим, что при одних и тех же значениях аргумента значения функции $y = \frac{2}{x}$ получаются умножением на 2 значений функции $y = \frac{1}{x}$. Это значит, что график функции $y = \frac{2}{x}$ получается растяжени-

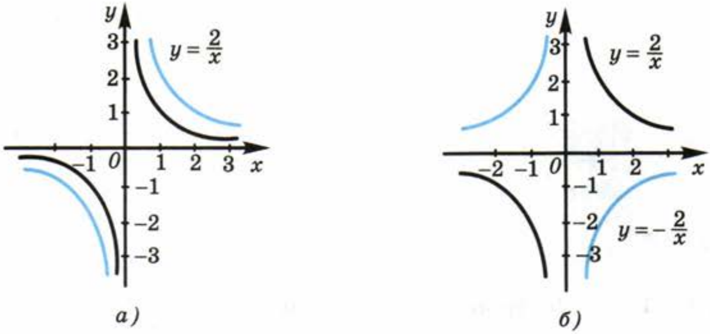


Рис. **12**

ем графика функции $y=\frac{1}{x}$ от оси абсцисс вдоль оси ординат в 2 раза (рис. 12, *а*).

Значения функции $y=-\frac{2}{x}$ отличаются от значений функции $y=\frac{2}{x}$ при одних и тех же значениях аргумента только знаком. Следовательно, график функции $y=-\frac{2}{x}$ симметричен графику функции $y=\frac{2}{x}$ относительно оси абсцисс (рис. 12, *б*). ◁

График функции $y=\frac{k}{x}$ при любом $k \neq 0$ также называют *гиперболой. Гипербола имеет две ветви*, которые расположены в первом и третьем квадрантах, если $k > 0$, и во втором и четвёртом квадрантах, если $k < 0$.

Функция $y=\frac{k}{x}$, где $k > 0$, обладает такими же свойствами, что и функция $y=\frac{1}{x}$, а именно эта функция:

1) определена при $x \neq 0$;
2) принимает все действительные значения, кроме нуля;
3) нечётная;
4) принимает положительные значения при $x>0$ и отрицательные — при $x<0$;
5) убывает на промежутках $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$.

Если $k < 0$, то функция $y=\frac{k}{x}$ обладает свойствами 1—3, а свойства 4—5 формулируются так:

4) принимает положительные значения при $x<0$ и отрицательные — при $x>0$;
5) возрастает на промежутках $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$.

Говорят, что функция $y = \frac{k}{x}$ при $k > 0$ выражает *обратную пропорциональную зависимость* между x и y. Такая зависимость между величинами часто встречается в физике, технике и т. д. Например, при равномерном движении по окружности с постоянной скоростью v тело движется с центростремительным ускорением a, равным $\frac{v^2}{r}$, где r — радиус окружности, т. е. в этом случае ускорение обратно пропорционально радиусу окружности.

Задача 3 Вычислить центростремительное ускорение Луны, которая движется вокруг Земли на расстоянии $3{,}84 \cdot 10^8$ м, совершая один оборот за 27,3 сут.

▶ Вычислим ускорение a по формуле $a = \frac{v^2}{r}$, где $v = \frac{C}{t}$, $C = 2\pi r$, $t = 27{,}3 \cdot 24 \cdot 3600$ с, $r = 3{,}84 \cdot 10^8$.

Используя микрокалькулятор, получим:

$$a = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot 3{,}84 \cdot 10^8}{(27{,}3 \cdot 24 \cdot 3600)^2} \approx 2{,}72 \cdot 10^{-3}.$$

Ответ $2{,}72 \cdot 10^{-3}$ м/с^2. ◁

Задача 4 Построить график функции $y = \frac{2}{x-1} - 2$.

▶ График этой функции можно построить, сдвигая график функции $y = \frac{2}{x}$ (рис. 11) вдоль оси Ox вправо на единицу и вдоль оси Oy вниз на 2 единицы (рис. 13). ◁

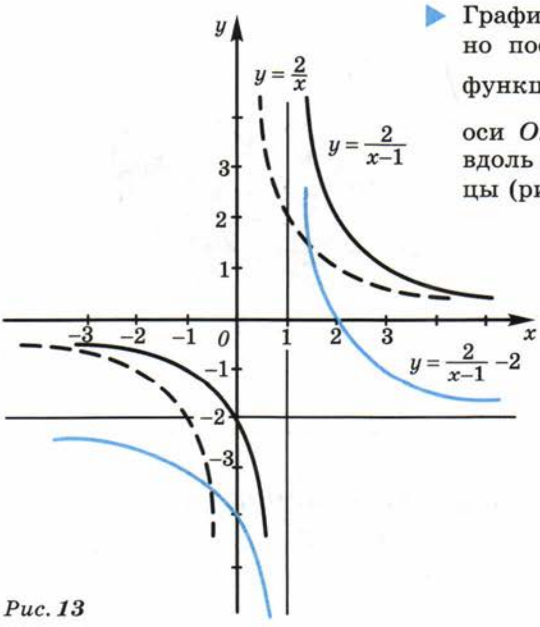


Рис. 13

Упражнения

184 Построить график функции $y=\frac{2}{x}$. Выяснить, при каких значениях x:

1) $y(x) = 4$; 2) $y(x)=-\frac{1}{2}$;

3) $y(x) > 1$; 4) $y(x) \leqslant 1$.

185 На одной координатной плоскости построить графики функций $y=\frac{1}{x}$ и $y = x$. Выяснить, при каких значениях x:

1) графики этих функций пересекаются; 2) график первой функции лежит выше (ниже) графика второй.

186 Не строя графики функций, найти координаты точек их пересечения:

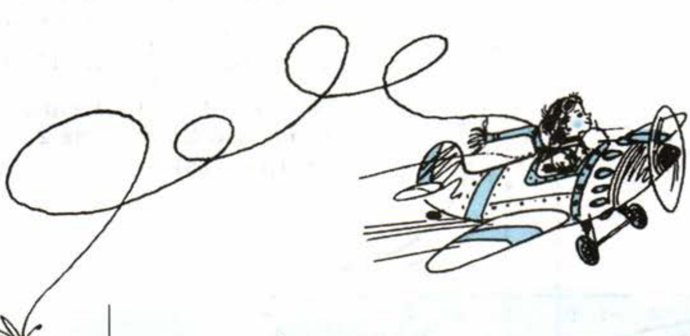
1) $y=\frac{12}{x}$, $y = 3x$; 2) $y=-\frac{8}{x}$, $y = -2x$;

3) $y=\frac{2}{x}$, $y = x - 1$; 4) $y=\frac{6}{x+1}$, $y = x + 2$.

187 Построив графики функций, найти приближённые значения координат точек их пересечения:

1) $y=\frac{3}{x}$, $y = x + 1$; 2) $y=-\frac{3}{x}$, $y = 1 - x$;

3) $y=\frac{2}{x}$, $y = x^2 + 2$; 4) $y=\frac{1}{x}$, $y = x^2 + 4x$.



№ 4

РЕШИТЬ УРАВНЕНИЕ

$$x^{x^3} = 3.$$

188 В цилиндре под поршнем при постоянной температуре находится газ. Объём V (в литрах) газа при давлении p (в атмосферах) вычисляется по формуле $V = \frac{12}{p}$.

1) Найти объём, занимаемый газом при 4 атм; 5 атм; 10 атм.

2) Вычислить, при каком давлении газ имеет объём 3 л, 5 л, 15 л.

3) Построить график зависимости объёма газа от его давления.

189 Сила тока в реостате I (в амперах) вычисляется по формуле $I = \frac{U}{R}$, где U — напряжение (в вольтах), R — сопротивление (в омах).

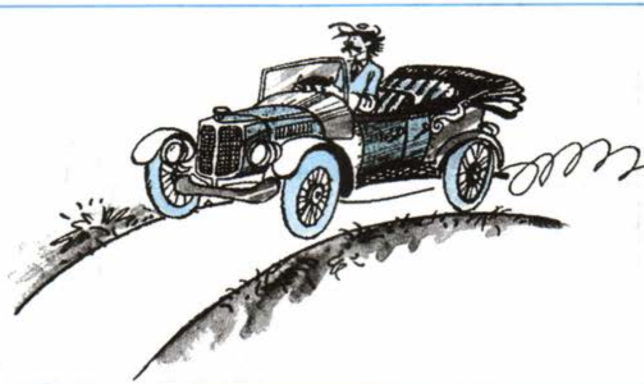
1) Построить график зависимости I (R) при $U = 6$.

2) По графику приближённо найти: а) силу тока при сопротивлении, равном 6; 12; 20 Ом; б) сопротивление реостата при силе тока, равной 10; 5; 1,2 А.

190 Построить график функции:

1) $y = \frac{3}{x} - 2$; 2) $y = \frac{2}{x} + 1$;

3) $y = \frac{2}{x+2} - 1$; 4) $y = \frac{3}{1-x} + 1$.



191 Автомобиль движется по закруглению дороги радиусом 150 м со скоростью 60 км/ч. Найти центростремительное ускорение автомобиля. Увеличится или уменьшится центростремительное ускорение, если скорость автомобиля останется прежней, а радиус закругления дороги увеличится?

§ 16 Неравенства и уравнения, содержащие степень

Свойства степенной функции используются при решении различных уравнений и неравенств.

Задача 1 Решить неравенство $x^5 > 32$.

▶ Функция $y = x^5$ определена и возрастает при всех действительных значениях x. Так как $y(2) = 32$, то $y(x) > 32$ при $x > 2$ и $y(x) < 32$ при $x < 2$.

Ответ $x > 2$. ◁

Задача 2 Решить неравенство $x^4 \leqslant 81$.

▶ Функция $y = x^4$ убывает при $x \leqslant 0$ и возрастает при $x \geqslant 0$. Уравнение $x^4 = 81$ имеет два действительных корня $x_1 = -3$, $x_2 = 3$. Поэтому неравенство $x^4 \leqslant 81$ при $x \leqslant 0$ имеет решения $-3 \leqslant x \leqslant 0$ и при $x \geqslant 0$ — решения $0 \leqslant x \leqslant 3$ (рис. 14).

Ответ $-3 \leqslant x \leqslant 3$. ◁

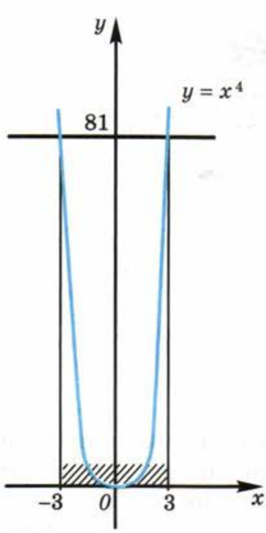


Рис. 14

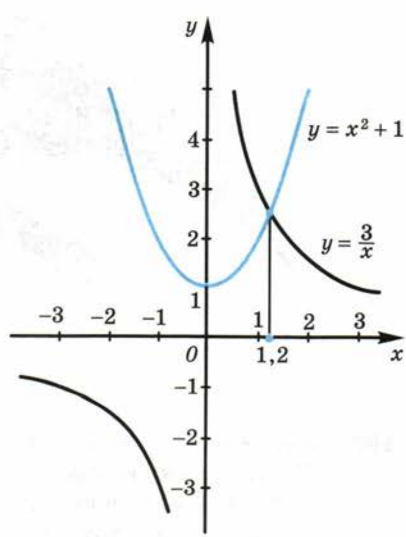


Рис. 15

Задача 3 С помощью графиков решить уравнение

$$\frac{3}{x} = x^2 + 1.$$

▶ На одной координатной плоскости построим графики функций $y = \frac{3}{x}$ и $y = x^2 + 1$ (рис. 15).

При $x < 0$ уравнение $\frac{3}{x} = x^2 + 1$ корней не имеет, так как $\frac{3}{x} < 0$, а $x^2 + 1 > 0$. При $x > 0$ это уравнение имеет один корень, равный абсциссе точки пересечения графиков этих функций. Из рисунка 15 видно, что $x_1 \approx 1{,}2$. Других положительных корней уравнение не имеет, так как при $x > x_1$ функция $y = \frac{3}{x}$ убывает, а функция $y = x^2 + 1$ возрастает, и, следовательно, графики функций при $x > x_1$ не пересекаются. По той же причине они не пересекаются при $0 < x < x_1$.

Ответ $x \approx 1{,}2$. ◁

Задача 4 Решить уравнение

$$\sqrt{2 - x^2} = x. \qquad (1)$$

▶ Пусть x — корень данного уравнения, т. е. x — такое число, при котором уравнение (1) обращается в верное равенство. Возведём обе части уравнения в квадрат:

$$2 - x^2 = x^2. \qquad (2)$$

Отсюда $x^2 = 1$, $x_{1,2} = \pm 1$.
Проверим, являются ли числа 1 и -1 корнями уравнения (1). При $x = 1$ уравнение (1) обращается в верное равенство $\sqrt{2 - 1^2} = 1$, поэтому $x = 1$ — корень уравнения (1).
При $x = -1$ левая часть уравнения (1) равна $\sqrt{2 - (-1)^2} = \sqrt{1} = 1$, а правая равна -1, т. е. $x = -1$ не является корнем уравнения (1).

Ответ $x = 1$. ◁

В рассмотренной задаче уравнение (1) было решено с помощью возведения обеих частей этого уравнения в квадрат. При этом получилось уравнение (2). Уравнение (1) имеет только один корень $x = 1$, а уравнение (2) — два корня $x_{1,2} = \pm 1$, т. е. при переходе от уравнения (1) к уравнению (2) появляется так называемый *посторонний корень*. Это произошло потому, что при $x = -1$ уравнение (1) обращается в неверное равенство $1 = -1$, а при возведении обеих частей этого неверного равенства в квадрат получается верное равенство $1^2 = (-1)^2$.

Таким образом, при возведении обеих частей уравнения в квадрат могут появиться посторонние корни.
При решении уравнения возведением в квадрат обеих его частей необходимо делать проверку.

Уравнение (1) — пример *иррационального уравнения*. Приведём ещё примеры иррациональных уравнений:

$$\sqrt{3-2x} = 1 - x; \quad \sqrt{x+1} = 2 - \sqrt{x-3}.$$

Рассмотрим решение нескольких иррациональных уравнений.

Задача 5 Решить уравнение $\sqrt{5-2x} = 1 - x$.

▶ Возведя обе части уравнения в квадрат, получим:

$$5 - 2x = x^2 - 2x + 1, \text{ или } x^2 = 4,$$

откуда $x_1 = 2$, $x_2 = -2$. Проверим, являются ли найденные числа корнями исходного уравнения.
При $x = 2$ левая часть исходного уравнения равна $\sqrt{5-2\cdot 2} = 1$, правая часть равна $1 - 2 = -1$. Так как $1 \neq -1$, то $x = 2$ не является корнем исходного уравнения.
При $x = -2$ левая часть уравнения равна $\sqrt{5-2(-2)} = 3$, правая часть равна $1 - (-2) = 3$. Следовательно, $x = -2$ — корень исходного уравнения.

Ответ $x = -2$. ◁

Задача 6 Решить уравнение $\sqrt{x-2} + 3 = 0$.

▶ Запишем это уравнение в виде $\sqrt{x-2} = -3$. Так как арифметический корень не может быть числом отрицательным, то это уравнение корней не имеет.

Ответ Корней нет. ◁

Задача 7 Решить уравнение $\sqrt{x-1}+\sqrt{11-x}=4$.

▶ Возведя обе части уравнения в квадрат, получим:

$$x-1+2\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{11-x}+11-x=16.$$

Приведём подобные члены и запишем уравнение в виде

$$2\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{11-x}=6, \text{ или } \sqrt{x-1}\cdot\sqrt{11-x}=3.$$

Возведя обе части последнего уравнения в квадрат, получим:

$$(x-1)(11-x)=9, \text{ или } x^2-12x+20=0,$$

откуда $x_1=2$, $x_2=10$. Проверка показывает, что каждое из чисел 2 и 10 является корнем исходного уравнения.

Ответ $x_1=2$, $x_2=10$. ◁

Упражнения

192 Решить неравенство:

1) $x^7>1$; 2) $x^3\leqslant 27$;
3) $y^3\geqslant 64$; 4) $y^3<125$;
5) $x^4\leqslant 16$; 6) $x^4>625$.

193 1) Какой может быть сторона квадрата, если его площадь больше 361 см^2?
2) Каким может быть ребро куба, если его объём больше 343 дм^3?

194 (Устно.) Показать, что число 7 является корнем уравнения:
1) $\sqrt{x-3}=2$;
2) $\sqrt{x^2-13}-\sqrt{2x-5}=3$.

195 (Устно.) Решить уравнение:
1) $\sqrt{x}=3$; 2) $\sqrt{x}=7$;
3) $\sqrt{2x-1}=0$; 4) $\sqrt{3x+2}=0$.

Решить уравнение **(196—199)**.

196 1) $\sqrt{x+1}=2$; 2) $\sqrt{x-1}=3$;
3) $\sqrt{1-2x}=4$; 4) $\sqrt{2x-1}=3$.

197 1) $\sqrt{x+1}=\sqrt{2x-3}$; 2) $\sqrt{x-2}=\sqrt{3x-6}$;
3) $\sqrt{x^2+24}=\sqrt{11x}$; 4) $\sqrt{x^2+4x}=\sqrt{14-x}$.

198 1) $\sqrt{x+2}=x$; 2) $\sqrt{3x+4}=x$;

3) $\sqrt{20-x^2}=2x$; 4) $\sqrt{0{,}4-x^2}=3x$.

199 1) $\sqrt{x^2-x-8}=x-2$; 2) $\sqrt{x^2+x-6}=x-1$.

200 Решить неравенство:

1) $(x-1)^3>1$; 2) $(x+5)^3>8$;

3) $(2x-3)^7\geqslant 1$; 4) $(3x-5)^7<1$;

5) $(3-x)^4>256$; 6) $(4-x)^4>81$.

201 Объяснить, почему не имеет корней уравнение:

1) $\sqrt{x}=-8$; 2) $\sqrt{x}+\sqrt{x-4}=-3$;

3) $\sqrt{-2-x^2}=12$; 4) $\sqrt{7x-x^2-63}=5$.

Решить уравнение (202—204).

202 1) $\sqrt{x^2-4x+9}=2x-5$; 2) $\sqrt{x^2+3x+6}=3x+8$;

3) $2x=1+\sqrt{x^2+5}$; 4) $x+\sqrt{13-4x}=4$.

203 1) $\sqrt{x+12}=2+\sqrt{x}$; 2) $\sqrt{4+x}+\sqrt{x}=4$.

204 1) $\sqrt{2x+1}+\sqrt{3x+4}=3$; 2) $\sqrt{4x-3}+\sqrt{5x+4}=4$;

3) $\sqrt{x-7}-\sqrt{x+17}=-4$; 4) $\sqrt{x+4}-\sqrt{x-1}=1$.

205 При каких значениях x принимают одинаковые значения функции:

1) $y=\sqrt{4+\sqrt{x}}$, $y=\sqrt{19-2\sqrt{x}}$;

2) $y=\sqrt{7+\sqrt{x}}$, $y=\sqrt{11-\sqrt{x}}$?

206 Решить неравенство:

1) $\sqrt{x-2}>3$; 2) $\sqrt{x-2}\leqslant 1$;

3) $\sqrt{2-x}\geqslant x$; 4) $\sqrt{2-x}<x$;

5) $\sqrt{5x+11}>x+3$; 6) $\sqrt{x+3}\leqslant x+1$.

207 Стрельба из спортивного пистолета по круглой мишени диаметром 1 м ведётся из точки прямой, перпендикулярной плоскости мишени и проходящей через её центр. На каком расстоянии от мишени должна быть точка выстрела, чтобы разность расстояний от неё до края мишени и до центра была не больше 2 см?

Упражнения к главе III

208 Найти область определения функции:

1) $y = \frac{1}{2x+1}$; 2) $y = (3-2x)^{-2}$;

3) $y = \sqrt{-5-3x}$; 4) $y = \sqrt[3]{7-3x}$.

209 (Устно.) Используя свойство возрастания функций $y = \sqrt[4]{x}$ и $y = x^5$, сравнить числа:

1) $\sqrt[4]{2{,}7}$ и $\sqrt[4]{2{,}9}$; 2) $\sqrt[4]{\frac{1}{7}}$ и $\sqrt[4]{\frac{1}{8}}$;

3) $(-2)^5$ и $(-3)^5$; 4) $\left(2\frac{2}{3}\right)^5$ и $\left(2\frac{3}{4}\right)^5$.

210 Выяснить свойства функции и построить эскиз её графика:

1) $y = -2x^4$; 2) $y = \frac{1}{2}x^5$;

3) $y = 2\sqrt[4]{x}$; 4) $y = 3\sqrt[3]{x}$.

211 (Устно.) В каких квадрантах расположены ветви гиперболы $y = \frac{k}{x}$, если $k = -4$; $k = 3$?

212 Построить в одной системе координат графики функций $y = x$ и $y = x^3$. Найти координаты точек их пересечения.

213 Найти координаты точек пересечения графиков функций:

1) $y = x^2$, $y = x^3$; 2) $y = \frac{1}{x}$, $y = 2x$;

3) $y = \sqrt{x}$, $y = |x|$; 4) $y = \sqrt[3]{x}$, $y = \frac{1}{x}$.

214 Решить неравенство:

1) $x^4 \leqslant 81$; 2) $x^5 > 32$; 3) $x^6 > 64$; 4) $x^5 \leqslant -32$.

215 Решить уравнение:

1) $\sqrt{3-x} = 2$; 2) $\sqrt{3x+1} = 7$;

3) $\sqrt{3-11x} = 2x$; 4) $\sqrt{5x-1+3x^2} = 3x$;

5) $\sqrt{2x-1} = x-2$; 6) $\sqrt{2-2x} = x+3$.

Проверь себя!

1 Найти область определения функции:

1) $y = \frac{8}{x-1}$; 2) $y = \sqrt{9 - x^2}$.

2 Построить график функции:

1) $y = \sqrt{x}$; 2) $y = \frac{6}{x}$; 3) $y = -\frac{5}{x}$; 4) $y = x^3$.

Для каждой функции по графику найти: а) $y(2)$; б) значение x, если $y(x) = 3$; в) промежутки, на которых $y(x) > 0$, $y(x) < 0$; г) промежутки возрастания, убывания.

3 Установить, чётной или нечётной является функция:

1) $y = 3x^6 + x^2$; 2) $y = 8x^5 - x$.

4 Решить уравнение:

1) $\sqrt{x-3} = 5$; 3) $\sqrt{3 - x - x^2} = x$.

216 Найти область определения функции:

1) $y = \sqrt[3]{x^2 + 2x - 15}$; 2) $y = \sqrt[4]{13x - 22 - x^2}$;

3) $y = \sqrt{\frac{x^2 + 6x + 5}{x + 7}}$; 4) $y = \sqrt{\frac{x^2 - 9}{x^2 + 8x + 7}}$.

217 Выяснить, возрастает или убывает функция:

1) $y = \frac{1}{(x-3)^2}$ на промежутке $(3; +\infty)$;

2) $y = \frac{1}{(x-2)^3}$ на промежутке $(-\infty; 2)$;

3) $y = \sqrt[3]{x+1}$ на промежутке $[0; +\infty)$;

4) $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x+1}}$ на промежутке $(-\infty; -1)$.

218 Выяснить, является ли функция чётной или нечётной:

1) $y = x^6 - 3x^4 + x^2 - 2$; 2) $y = x^5 - x^3 + x$.

219 Выяснить свойства функции и построить её график:

1) $y = \frac{1}{x^2}$; 2) $y = \frac{1}{x^3}$; 3) $y = 3 - \frac{1}{x^2}$; 4) $y = \frac{1}{(x-1)^3} - 2$.

Решить неравенство **(220—221)**.

220 1) $(3x + 1)^4 > 625$; 2) $(3x^2 + 5x)^5 \leqslant 32$.

221 1) $\sqrt{x^2 - 3x} < 2$; 2) $\sqrt{2x+1} \leqslant x - 1$.

222 Решить уравнение:

1) $\sqrt{2x^2 + 5x - 3} = x + 1$; 2) $\sqrt{3x^2 - 4x + 2} = x + 4$;

3) $\sqrt{x+3} + \sqrt{2x-3} = 6$; 4) $\sqrt{7-x} + \sqrt{3x-5} = 4$.

IV глава

Прогрессии

§ 17 Числовая последовательность

В повседневной практике часто используется нумерация различных предметов, чтобы указать порядок их расположения. Например, дома на каждой улице нумеруются. В библиотеке нумеруются читательские абонементы и затем располагаются в порядке присвоенных номеров в специальных картотеках.

В сберегательном банке по номеру лицевого счёта вкладчика можно легко найти этот счёт и посмотреть, какой вклад на нём лежит. Пусть на счёте № 1 лежит вклад a_1 рублей, на счёте № 2 лежит вклад a_2 рублей и т. д. Получается *числовая последовательность*

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_N,$$

где N — число всех счетов. Здесь каждому натуральному числу n от 1 до N поставлено в соответствие число a_n.

В математике изучаются *бесконечные* числовые последовательности:

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots .$$

Число a_1 называют *первым членом* последовательности, число a_2 — *вторым членом* последовательности, число a_3 — *третьим членом* последовательности и т. д.

Число a_n называют *n-м (энным) членом* последовательности, а натуральное число n — его *номером*.

Например, в последовательности квадратов натуральных чисел 1, 4, 9, 16, 25, ..., n^2, $(n+1)^2$, ... $a_1 = 1$ — первый член последовательности; $a_n = n^2$ является n-м членом последовательности; $a_{n+1} = (n+1)^2$ является $(n+1)$-м (эн плюс первым) членом последовательности.

Часто последовательность можно задать формулой её n-го члена.

Например, формулой $a_n = \frac{1}{n}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ задана последовательность $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$.

Задача 1 Числовая последовательность задана формулой $a_n = n(n-2)$. Вычислить сотый член этой последовательности.

▶ $a_{100} = 100(100-2) = 9800$. ◁

Задача 2 Числовая последовательность задана формулой $x_n = 2n + 3$. 1) Найти номер члена последовательности, равного 43. 2) Выяснить, является ли число 50 членом данной последовательности.

▶ 1) По условию $2n + 3 = 43$, откуда $n = 20$.

2) Если 50 — член последовательности с номером n, то $2n + 3 = 50$, откуда $n = 23{,}5$. Так как полученное значение n не является натуральным, то оно не может быть номером члена последовательности, т. е. число 50 не является членом последовательности. ◁

Иногда последовательность задают формулой, позволяющей вычислить любой член последовательности, начиная с некоторого, если известны один или несколько предыдущих её членов. Такой способ задания последовательности называют *рекуррентным* (от лат. слова *recurro* — возвращаться).

Задача 3 Числовая последовательность задана рекуррентной формулой $b_{n+2} = b_{n+1} + b_n$ и условиями $b_1 = 1$, $b_2 = 3$. Вычислить пятый член этой последовательности.

▶ $b_3 = b_2 + b_1 = 3 + 1 = 4$,
$b_4 = b_3 + b_2 = 4 + 3 = 7$,
$b_5 = b_4 + b_3 = 7 + 4 = 11$.

Ответ $b_5 = 11$. ◁

Упражнения

223 Дана последовательность квадратов натуральных чисел

$$1,\ 4,\ 9,\ 16,\ 25,\ \ldots,\ n^2,\ (n+1)^2,\ \ldots .$$

1) Назвать третий, шестой, n-й члены последовательности.
2) Указать номер члена последовательности, равного 4, 25, n^2, $(n+1)^2$.

224 Вычислить первые три члена последовательности, которая задана формулой n-го члена:

1) $a_n = 2n + 3$; 2) $a_n = 1 + 3n$; 3) $a_n = 100 - 10n^2$;
4) $a_n = \frac{n-2}{3}$; 5) $a_n = \frac{1}{n}$; 6) $a_n = -n^3$.

225 (Устно.) Последовательность задана формулой $x_n = n^2$. Какой номер имеет член этой последовательности, равный 100; 144; 225? Является ли членом последовательности число 48; 49; 169?

226 Последовательность задана формулой $a_n = n^2 - 2n - 6$. Является ли членом этой последовательности число:

1) -3; 2) 2; 3) 3; 4) 9?

227 Найти первые четыре члена последовательности, заданной условием $a_1 = 2$ и рекуррентной формулой:

1) $a_{n+1} = 3a_n + 1$; 2) $a_{n+1} = 5 - 2a_n$.

228 Числовая последовательность задана формулой n-го члена $a_n = (n-1)(n+4)$. Найти n, если:

1) $a_n = 150$; 2) $a_n = 104$.

229 Вычислить первые четыре члена последовательности, заданной рекуррентной формулой $a_{n+1} = \sqrt{a_n}$ и условием $a_1 = 256$.

230 Записать первые шесть членов последовательности, заданной условием $a_1 = 1$ и рекуррентной формулой:

1) $a_{n+1} = \sqrt{a_n^2 + 3}$; 2) $a_{n+1} = \sqrt{\frac{a_n^2}{3}}$.

231 Числовая последовательность задана рекуррентной формулой $a_{n+2} = a_n^2 - a_{n+1}$ и условиями $a_1 = 2$, $a_2 = 3$. Вычислить пятый член последовательности.

232 Последовательность задана формулой n-го члена. Записать $(n+1)$-й, $(n+2)$-й и $(n+5)$-й члены этой последовательности:

1) $a_n = -5n + 4$; 2) $a_n = 2(n - 10)$;
3) $a_n = 2 \cdot 3^{n+1}$; 4) $a_n = 7 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}$.

§ 18

Арифметическая прогрессия

Продолжительность года приблизительно равна 365 суткам. Более точное значение равно $365\frac{1}{4}$ суток, поэтому каждые четыре года накапливается погрешность, равная одним суткам.

Для учёта этой погрешности к каждому четвёртому году добавляются сутки, и удлинённый год называют високосным.

Например, в третьем тысячелетии високосными годами являются годы

$$2004,\ 2008,\ 2012,\ 2016,\ \ldots .$$

В этой последовательности каждый её член, начиная со второго, равен предыдущему, сложенному с одним и тем же числом 4. Такие последовательности называют *арифметическими прогрессиями*.

Определение. Числовая последовательность $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ называется *арифметической прогрессией*, если для всех натуральных n выполняется равенство

$$a_{n+1} = a_n + d,$$

где d — некоторое число.

Из этой формулы следует, что $a_{n+1} - a_n = d$. Число d называют *разностью арифметической прогрессии*.

Примеры

1) Натуральный ряд чисел $1, 2, 3, 4, \ldots, n, \ldots$ является арифметической прогрессией. Разность этой прогрессии $d = 1$.

2) Последовательность целых отрицательных чисел $-1, -2, -3, \ldots, -n, \ldots$ — арифметическая прогрессия с разностью $d = -1$.

3) Последовательность $3, 3, 3, \ldots, 3, \ldots$ — арифметическая прогрессия с разностью $d = 0$.

Задача 1 Доказать, что последовательность, заданная формулой $a_n = 1{,}5 + 3n$, является арифметической прогрессией.

▶ Требуется доказать, что разность $a_{n+1} - a_n$ одна и та же для всех n (не зависит от n).
Запишем $(n + 1)$-й член данной последовательности:

$$a_{n+1} = 1{,}5 + 3\,(n + 1).$$

Поэтому

$$a_{n+1} - a_n = 1{,}5 + 3\,(n + 1) - (1{,}5 + 3n) = 3.$$

Следовательно, разность $a_{n+1} - a_n$ не зависит от n. ◁

По определению арифметической прогрессии

$$a_{n+1} = a_n + d,\ a_{n-1} = a_n - d,$$

откуда

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}, \quad \text{где} \quad n > 1.$$

Таким образом, каждый член арифметической прогрессии, начиная со второго, равен среднему арифметическому двух соседних с ним членов. Этим объясняется название «арифметическая» прогрессия.

Отметим, что если a_1 и d заданы, то остальные члены арифметической прогрессии можно вычислить по рекуррентной формуле $a_{n+1} = a_n + d$. Таким способом нетрудно вычислить несколько первых членов прогрессии, однако, например, для a_{100} уже потребуется много вычислений. Обычно для этого используется формула n-го члена. По определению арифметической прогрессии

$$a_2 = a_1 + d,$$
$$a_3 = a_2 + d = a_1 + 2d,$$
$$a_4 = a_3 + d = a_1 + 3d$$

и т. д.
Вообще,

$$a_n = a_1 + (n - 1)\,d, \qquad (1)$$

так как n-й член арифметической прогрессии получается из первого члена прибавлением $(n - 1)$ раз числа d.
Формулу (1) называют *формулой n-го члена арифметической прогрессии*.

Задача 2 Найти сотый член арифметической прогрессии, если $a_1 = -6$ и $d = 4$.

▶ По формуле (1) имеем $a_{100} = -6 + (100 - 1) \cdot 4 = 390$. ◁

Задача 3 Число 99 является членом арифметической прогрессии 3, 5, 7, 9, ... Найти номер этого члена.

▶ Пусть n — искомый номер. Так как $a_1 = 3$ и $d = 2$, то по формуле $a_n = a_1 + (n - 1)\,d$ имеем $99 = 3 + (n - 1) \cdot 2$. Поэтому $99 = 3 + 2n - 2$; $98 = 2n$, $n = 49$. ◁

Задача 4 В арифметической прогрессии $a_8 = 130$ и $a_{12} = 166$. Найти формулу n-го члена.

▶ Используя формулу (1), находим:

$$a_8 = a_1 + 7d,\ a_{12} = a_1 + 11d.$$

Подставив в эти выражения данные значения a_8 и a_{12}, получим систему уравнений относительно a_1 и d:

$$\begin{cases} a_1 + 7d = 130, \\ a_1 + 11d = 166. \end{cases}$$

Вычитая из второго уравнения первое, получаем:

$$4d = 36,\ d = 9.$$

Следовательно, $a_1 = 130 - 7d = 130 - 63 = 67$.
Найдём формулу n-го члена прогрессии:

$$a_n = 67 + 9\,(n - 1) = 67 + 9n - 9 = 58 + 9n.$$

Ответ $a_n = 9n + 58$. ◁

Задача 5 На стороне угла откладываются от его вершины равные отрезки. Через их концы проводятся параллельные прямые. Доказать, что длины a_1, a_2, a_3, ... отрезков этих прямых, заключённых между сторонами угла (рис. 16), образуют арифметическую прогрессию.

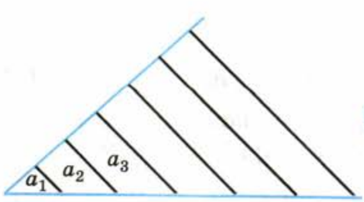


Рис. ***16***

▶ В образовавшейся трапеции с основаниями a_{n-1} и a_{n+1} средняя линия равна a_n $(n > 1)$. Поэтому $a_n = \dfrac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$.

Отсюда $2a_n = a_{n-1} + a_{n+1}$, или $a_{n+1} - a_n = a_n - a_{n-1}$.
Так как разность между каждым членом последовательности и предшествующим ему членом одна и та же, то эта последовательность — арифметическая прогрессия. ◁

Упражнения

233 (Устно.) Назвать первый член и разность арифметической прогрессии:
1) 6, 8, 10, ...; 2) 7, 9, 11, ...;
3) 25, 21, 17, ...; 4) –12, –9, –6, ...

234 Записать первые пять членов арифметической прогрессии, если:
1) $a_1 = 2$, $d = 5$; 2) $a_1 = -3$, $d = 2$.

235 Доказать, что последовательность, заданная формулой n-го члена, является арифметической прогрессией:
1) $a_n = 3 - 4n$; 2) $a_n = -5 + 2n$;
3) $a_n = 3(n + 1)$; 4) $a_n = 2(3 - n)$.

236 В арифметической прогрессии найти:
1) a_{15}, если $a_1 = 2$, $d = 3$;
2) a_{20}, если $a_1 = 3$, $d = 4$;
3) a_{18}, если $a_1 = -3$, $d = -2$;
4) a_{11}, если $a_1 = -2$, $d = -4$.

237 Записать формулу n-го члена арифметической прогрессии:
1) 1, 6, 11, 16, ...; 2) 25, 21, 17, 13, ...;
3) –4, –6, –8, –10, ...; 4) 1, –4, –9, –14, ...

238 Число –22 является членом арифметической прогрессии 44, 38, 32, ... Найти номер этого члена.

239 Является ли число 12 членом арифметической прогрессии –18, –15, –12, ...?

240 Число –59 является членом арифметической прогрессии 1, –5, ... Найти его номер. Является ли число –46 членом этой прогрессии?

241 Найти разность арифметической прогрессии, если:
1) $a_1 = 7$, $a_{16} = 67$; 2) $a_1 = -4$, $a_9 = 0$.

242 Разность арифметической прогрессии равна 1,5. Найти a_1, если:
1) $a_9 = 12$; 2) $a_7 = -4$.

243 Найти первый член арифметической прогрессии, если:
1) $d = -3$, $a_{11} = 20$; 2) $a_{21} = -10$, $a_{22} = -5{,}5$.

244 Найти формулу n-го члена арифметической прогрессии, если:
1) $a_3 = 13$, $a_6 = 22$; 2) $a_2 = -7$, $a_7 = 18$.

245 При каких n члены арифметической прогрессии 15, 13, 11, ... отрицательны?

246 В арифметической прогрессии $a_1 = -10$, $d = 0{,}5$. При каких n выполняется неравенство $a_n < 2$?

247 Найти девятый член и разность арифметической прогрессии, если:
1) $a_8 = 126$, $a_{10} = 146$; 2) $a_8 = -64$, $a_{10} = -50$;
3) $a_8 = -7$, $a_{10} = 3$; 4) $a_8 = 0{,}5$, $a_{10} = -2{,}5$.

248 Свободно падающее тело проходит в первую секунду 4,9 м, а в каждую следующую секунду на 9,8 м больше, чем в предыдущую. Какое расстояние будет пройдено падающим телом за пятую секунду?

249 Курс воздушных ванн начинают с 15 мин в первый день и увеличивают время этой процедуры в каждый следующий день на 10 мин. Сколько дней следует принимать воздушные ванны в указанном режиме, чтобы достичь их максимальной продолжительности 1 ч 45 мин?

250 Доказать, что для арифметической прогрессии справедливо равенство

$$a_n + a_k = a_{n-l} + a_{k+l},\ n > l.$$

Найти $a_{10} + a_5$, если $a_7 + a_8 = 30$.

251 Доказать, что для арифметической прогрессии справедливо равенство

$$a_n = \frac{a_{n+k} + a_{n-k}}{2},\ n > k.$$

Найти a_{20}, если $a_{10} + a_{30} = 120$.

§ 19 Сумма *n* первых членов арифметической прогрессии

Задача 1 Найти сумму всех натуральных чисел от 1 до 100.

▶ Запишем эту сумму двумя способами:

$$S = 1 + 2 + 3 + \ldots + 99 + 100,$$
$$S = 100 + 99 + 98 + \ldots + 2 + 1.$$

Сложим почленно эти равенства:

$$2S = \underbrace{101 + 101 + 101 + \ldots + 101 + 101}_{100 \text{ слагаемых}}.$$

Следовательно, $2S = 101 \cdot 100$, откуда $S = 101 \cdot 50 = 5050$. ◁

Рассмотрим теперь произвольную арифметическую прогрессию

$$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots .$$

Пусть S_n — сумма n первых членов этой прогрессии:

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n.$$

Теорема. Сумма n первых членов арифметической прогрессии равна

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n. \quad (1)$$

Запишем S_n двумя способами:

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n,$$
$$S_n = a_n + a_{n-1} + \dots + a_2 + a_1.$$

По определению арифметической прогрессии эти равенства можно записать так:

$$S_n = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \dots + \\ + (a_1 + (n-1)\,d), \tag{2}$$
$$S_n = a_n + (a_n - d) + (a_n - 2d) + \dots + \\ + (a_n - (n-1)\,d). \tag{3}$$

Сложим почленно равенства (2) и (3):

$$2S_n = \underbrace{(a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \dots + (a_1 + a_n)}_{n \text{ слагаемых}}.$$

Следовательно, $2S_n = (a_1 + a_n)\,n$, откуда

$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n.$ ○

Задача 2 Найти сумму шестидесяти первых чётных натуральных чисел.

▶ Последовательность чётных натуральных чисел

$$2,\ 4,\ 6,\ 8,\ \dots,\ 2n,\ \dots$$

является арифметической прогрессией с разностью $d = 2$. Так как $a_n = 2n$, то $a_1 = 2$, $a_{60} = 120$. По формуле (1) находим:

$S_{60} = \frac{2 + 120}{2} \cdot 60 = 3660.$ ◁

Задача 3 Найти сумму $38 + 35 + 32 + \dots + (-7)$, если известно, что её слагаемые являются последовательными членами арифметической прогрессии.

▶ По условию $a_1 = 38$, $d = -3$, $a_n = -7$.
Применяя формулу $a_n = a_1 + (n-1)\,d$, получаем $-7 = 38 + (n-1)(-3)$, откуда $n = 16$.

По формуле $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$ находим:

$S_{16} = \frac{38 - 7}{2} \cdot 16 = 248.$ ◁

Задача 4* Сколько нужно взять последовательных натуральных чисел, начиная с 1, чтобы их сумма была равна 153?

▶ Натуральный ряд чисел — арифметическая прогрессия с разностью $d = 1$. По условию $a_1 = 1$,

$S_n = 153$. Формулу суммы n первых членов преобразуем так:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{a_1 + a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n.$$

Используя данные, получаем уравнение с неизвестным n:

$$153 = \frac{2 \cdot 1 + (n-1) \cdot 1}{2} \cdot n,$$

откуда

$$306 = 2n + (n-1)\,n, \quad n^2 + n - 306 = 0.$$

Решая это уравнение, найдём:

$$n_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 1224}}{2} = \frac{-1 \pm 35}{2},$$

$$n_1 = -18,\ n_2 = 17.$$

Число слагаемых не может быть отрицательным, поэтому $n = 17$.

Упражнения

252 Найти сумму n первых членов арифметической прогрессии, если:

1) $a_1 = 1$, $a_n = 20$, $n = 50$;
2) $a_1 = 1$, $a_n = 200$, $n = 100$;
3) $a_1 = -1$, $a_n = -40$, $n = 20$;
4) $a_1 = 2$, $a_n = 100$, $n = 50$.

253 Найти сумму всех натуральных чисел от 2 до 98 включительно.

254 Найти сумму всех нечётных чисел от 1 до 133 включительно.

255 Найти сумму двенадцати первых членов арифметической прогрессии, если:

1) $a_1 = -5$, $d = 0{,}5$;
2) $a_1 = \frac{1}{2}$, $d = -3$.

256 Найти сумму n первых членов арифметической прогрессии:

1) 9; 13; 17; ..., если $n = 11$;
2) -16; -10; -4; ..., если $n = 12$.

257 Найти сумму, если её слагаемые — последовательные члены арифметической прогрессии:

1) $3 + 6 + 9 + \ldots + 273$;
2) $90 + 80 + 70 + \ldots + (-60)$.

258 Найти сумму всех двузначных чисел; сумму всех трёхзначных чисел.

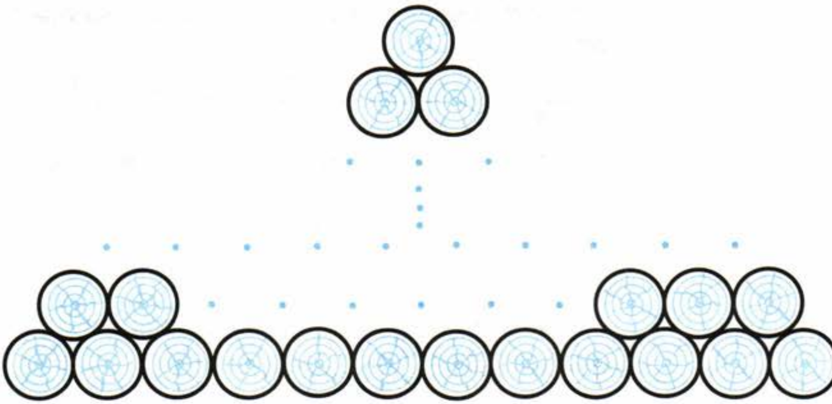


Рис. ***17***

259 Арифметическая прогрессия задана формулой n-го члена. Найти S_{50}, если:
1) $a_n = 3n + 5$; 2) $a_n = 7 + 2n$.

260 Последовательность задана рекуррентной формулой $a_{n+1} = a_n - 3$ и условием $a_1 = 7$. Найти сумму девяти первых членов этой последовательности.

261 Сколько нужно взять последовательных натуральных чисел, начиная с 3, чтобы их сумма была равна 75?

262 Найти a_n и d арифметической прогрессии, у которой:
1) $a_1 = 10$, $n = 14$, $S_{14} = 1050$;
2) $a_1 = 2\frac{1}{3}$, $n = 10$, $S_{10} = 90\frac{5}{6}$.

263 Найти a_1 и d арифметической прогрессии, если:
1) $a_7 = 21$, $S_7 = 205$; 2) $a_{11} = 92$, $S_{11} = 22$.

264 При хранении брёвен строевого леса их укладывают так, как показано на рисунке 17. Сколько брёвен находится в одной кладке, если в её основании положено 12 брёвен?

265 В арифметической прогрессии $a_3 + a_9 = 8$. Найти S_{11}.

266 Найти первый член и разность арифметической прогрессии, если $S_5 = 65$ и $S_{10} = 230$.

267 Доказать, что для арифметической прогрессии выполняется равенство

$$S_{12} = 3\,(S_8 - S_4).$$

§ 20 Геометрическая прогрессия

Рассмотрим равносторонний треугольник со стороной 4 см. Построим треугольник, вершинами которого являются середины сторон данного треугольника (рис. 18). По свойству средней линии треугольника сторона второго треугольника равна 2 см. Продолжая аналогичные построения, получим треугольники со сторонами 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ см и т. д. Запишем последовательность длин сторон этих треугольников: 4, 2, 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, ...

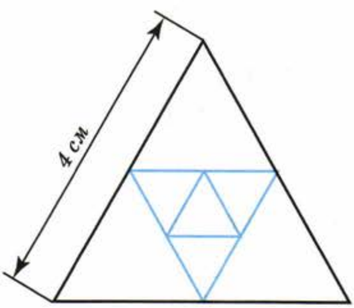


Рис. 18

В этой последовательности каждый её член, начиная со второго, равен предыдущему, умноженному на одно и то же число $\frac{1}{2}$.

Определение. Числовая последовательность

$$b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n, \ldots$$

называется *геометрической прогрессией*, если для всех натуральных n выполняется равенство

$$b_{n+1} = b_n q,$$

где $b_n \neq 0$, q — некоторое число, не равное нулю.

Из этой формулы следует, что $\frac{b_{n+1}}{b_n} = q$. Число q называется *знаменателем* геометрической прогрессии.

Примеры

1) 2, 8, 32, 128, ... — геометрическая прогрессия со знаменателем $q = 4$;

2) $1, \frac{2}{3}, \frac{4}{9}, \frac{8}{27}, \ldots$ — геометрическая прогрессия со знаменателем $q = \frac{2}{3}$;

3) $-\frac{1}{12}, 1, -12, 144, \ldots$ — геометрическая прогрессия со знаменателем $q = -12$;

4) $7, 7, 7, 7, \ldots$ — геометрическая прогрессия со знаменателем $q = 1$.

Задача 1 Доказать, что последовательность, заданная формулой $b_n = 7^{2n}$, является геометрической прогрессией.

▶ Отметим, что $b_n = 7^{2n} \neq 0$ при всех n. Требуется доказать, что частное $\frac{b_{n+1}}{b_n}$ — одно и то же число для всех n (не зависит от n). Получаем $\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{7^{2(n+1)}}{7^{2n}} = \frac{7^{2n+2}}{7^{2n}} = 49$, т. е. частное $\frac{b_{n+1}}{b_n}$ не зависит от n. ◁

По определению геометрической прогрессии

$$b_{n+1} = b_n q, \quad b_{n-1} = \frac{b_n}{q},$$

откуда

$$b_n^2 = b_{n-1} b_{n+1}, \ n > 1.$$

Если все члены геометрической прогрессии положительны, то $b_n = \sqrt{b_{n-1} b_{n+1}}$, т. е. каждый член прогрессии, начиная со второго, равен среднему геометрическому двух соседних с ним членов. Этим объясняется название «геометрическая» прогрессия.

Отметим, что если b_1 и q заданы, то остальные члены геометрической прогрессии можно вычислить по рекуррентной формуле $b_{n+1} = b_n q$. Однако для больших n это трудоёмко. Обычно пользуются формулой n-го члена.

По определению геометрической прогрессии

$$b_2 = b_1 q,$$
$$b_3 = b_2 q = b_1 q^2,$$
$$b_4 = b_3 q = b_1 q^3 \text{ и т. д.}$$

Вообще,

$$\boldsymbol{b_n = b_1 q^{n-1}}, \qquad (1)$$

так как n-й член геометрической прогрессии получается из первого члена умножением $(n-1)$ раз на число q.
Формулу (1) называют *формулой n-го члена геометрической прогрессии.*

Задача 2 Найти седьмой член геометрической прогрессии, если $b_1 = 81$ и $q = \frac{1}{3}$.

▶ По формуле (1) имеем:

$$b_7 = 81 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{7-1} = \frac{81}{3^6} = \frac{1}{9}. \triangleleft$$

Задача 3 Число 486 является членом геометрической прогрессии 2, 6, 18, ... Найти номер этого члена.

▶ Пусть n — искомый номер. Так как $b_1 = 2$, $q = 3$, то по формуле $b_n = b_1q^{n-1}$ имеем:

$$486 = 2 \cdot 3^{n-1}, \quad 243 = 3^{n-1}, \quad 3^5 = 3^{n-1},$$

откуда $n - 1 = 5$, $n = 6$. ◁

Задача 4* В геометрической прогрессии $b_6 = 96$ и $b_8 = 384$. Найти формулу n-го члена.

▶ По формуле $b_n = b_1q^{n-1}$ имеем $b_6 = b_1q^5$, $b_8 = b_1q^7$. Подставив данные в условии значения b_6 и b_8, получим $96 = b_1q^5$, $384 = b_1q^7$. Разделив второе из этих равенств на первое, получим:

$$\frac{384}{96} = \frac{b_1q^7}{b_1q^5},$$

откуда $4 = q^2$, или $q^2 = 4$. Из последнего равенства находим $q = 2$ или $q = -2$.
Чтобы найти первый член прогрессии, воспользуемся равенством $96 = b_1q^5$.
1) При $q = 2$ находим:

$$96 = b_1 \cdot 2^5, \quad 96 = b_1 \cdot 32, \quad b_1 = 3.$$

Если $b_1 = 3$ и $q = 2$, то формула n-го члена имеет вид:

$$b_n = 3 \cdot 2^{n-1}.$$

2) При $q = -2$ находим:

$$96 = b_1(-2)^5, \quad 96 = b_1(-32), \quad b_1 = -3.$$

Если $b_1 = -3$ и $q = -2$, то формула n-го члена имеет вид $b_n = -3 \cdot (-2)^{n-1}$.

Ответ $b_n = 3 \cdot 2^{n-1}$ или $b_n = -3 \cdot (-2)^{n-1}$. ◁

Задача 5* В окружность вписан квадрат, а в него вписана вторая окружность. Во вторую окружность вписан второй квадрат, а в него — третья окружность и т. д. (рис. 19). Доказать, что радиусы окружностей образуют геометрическую прогрессию.

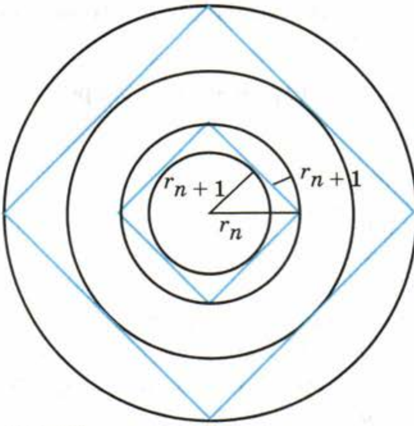


Рис. 19

▶ Пусть r_n — радиус n-й окружности. Тогда по теореме Пифагора $r_{n+1}^2 + r_{n+1}^2 = r_n^2$, откуда $r_{n+1}^2 = \frac{1}{2} r_n^2$; так как $r_n > 0$, то $r_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{2}} r_n$.

Значит, последовательность радиусов окружностей образует геометрическую прогрессию со знаменателем $\frac{1}{\sqrt{2}}$. ◁

Задача 6 Вкладчик поместил в банк a рублей под ежегодные $p\%$. Какую сумму он будет иметь на счету через 3 года?

▶ Через год на вкладе будет $a + a \cdot \frac{p}{100} = a\left(1 + \frac{p}{100}\right)$ рублей. Через 2 года сумма вклада увеличится ещё на $p\%$, но уже от суммы, которая оказалась на счету через год, и станет (в рублях) равной

$$a\left(1+\frac{p}{100}\right) + \left(a\left(1+\frac{p}{100}\right)\right)\cdot\frac{p}{100} =$$
$$= a\left(1+\frac{p}{100}\right)\cdot\left(1+\frac{p}{100}\right) = a\left(1+\frac{p}{100}\right)^2.$$

Найдём сумму (в рублях), которая будет на счету через 3 года:

$$a\left(1+\frac{p}{100}\right)^2 + \left(a\left(1+\frac{p}{100}\right)^2\right)\cdot\frac{p}{100} =$$
$$= a\left(1+\frac{p}{100}\right)^2\cdot\left(1+\frac{p}{100}\right) = a\left(1+\frac{p}{100}\right)^3.$$

Ответ $a\left(1+\frac{p}{100}\right)^3$. ◁

Формулу общего члена геометрической прогрессии, записанную в виде $b = b_1\left(1+\frac{p}{100}\right)^n$, называют *формулой сложных процентов.*

Задача 7 Банк начисляет по вкладам 4% годовых. Сколько денег будет на счету у вкладчика через 5 лет, если он положил на счёт 10000 р.?

▶ Искомую сумму денег b найдём по формуле сложных процентов при $b_1 = 10000$, $p = 4$, $n = 5$:
$b = 10000(1+0{,}04)^5 = 10000 \cdot 1{,}04^5 = 12166{,}529$,
т. е. 12166 р. 53 к.

Ответ 12166 р. 53 к. ◁

Упражнения

268 (Устно.) Назвать первый член и знаменатель геометрической прогрессии:
1) 4, 2, 1, ...; 2) –10, 20, –40, ...; 3) –50, 10, –2, ...

269 Записать первые пять членов геометрической прогрессии, если: 1) $b_1 = 12$, $q = 2$; 2) $b_1 = -3$, $q = -4$.

270 Доказать, что последовательность, заданная формулой n-го члена, является геометрической прогрессией:
1) $b_n = 3 \cdot 2^n$; 2) $b_n = 5^{n+3}$; 3) $b_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}$; 4) $b_n = \frac{1}{5^{n-1}}$.

271 Для геометрической прогрессии вычислить:
1) b_4, если $b_1 = 3$ и $q = 10$; 2) b_7, если $b_1 = 4$ и $q = \frac{1}{2}$;
3) b_5, если $b_1 = 1$ и $q = -2$; 4) b_6, если $b_1 = -3$ и $q = -\frac{1}{3}$.

272 Записать формулу n-го члена геометрической прогрессии:
1) 4, 12, 36, ...; 2) 3, 1, $\frac{1}{3}$, ...;
3) 4, –1, $\frac{1}{4}$, ...; 4) 3, –4, $\frac{16}{3}$, ...

273 Найти номер подчёркнутого члена геометрической прогрессии:
1) 6, 12, 24, ..., $\underline{192}$, ...; 2) 4, 12, 36, ..., $\underline{324}$, ...;
3) 625, 125, 25, ..., $\underline{\frac{1}{25}}$, ...; 4) –1, 2, –4, ..., $\underline{128}$, ...

274 Найти знаменатель геометрической прогрессии, если:
1) $b_1 = 2$, $b_5 = 162$; 2) $b_1 = -128$, $b_7 = -2$;
3) $b_1 = 3$, $b_4 = 81$; 4) $b_1 = 250$, $b_4 = -2$.

275 Дана геометрическая прогрессия 2, 6, 18, ...
1) Вычислить восьмой член этой прогрессии.
2) Найти номер члена последовательности, равного 162.

276 Найти седьмой член и знаменатель геометрической прогрессии с положительными членами, если:

1) $b_8 = \frac{1}{9}$, $b_6 = 81$; 2) $b_6 = 9$, $b_8 = 3$.

277 Найти пятый и первый члены геометрической прогрессии, если:

1) $b_4 = 5$, $b_6 = 20$; 2) $b_4 = 9$, $b_6 = 4$.

278 Вкладчик 1 января 2004 г. внёс в сберегательный банк 30 000 р. Какой была сумма его вклада на 1 января 2006 г., если сбербанк начислял ежегодно 6% от суммы вклада?

279 Дан квадрат со стороной 4 см. Середины его сторон являются вершинами второго квадрата. Середины сторон второго квадрата являются вершинами третьего квадрата и т. д. Доказать, что последовательность площадей этих квадратов является геометрической прогрессией. Найти площадь седьмого квадрата.

280 Каждое простейшее одноклеточное животное инфузория-туфелька размножается делением на 2 части. Сколько инфузорий было первоначально, если после шестикратного деления их стало 320?

281 Доказать, что если $x \neq 0$, то числа $\sqrt{3x}$, $x\sqrt{3}$, $x\sqrt{3x}$ являются тремя последовательными членами геометрической прогрессии.

§ 21 Сумма n первых членов геометрической прогрессии

Задача 1 Найти сумму

$$S = 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + 3^5. \qquad (1)$$

▶ Умножим обе части равенства на 3:

$$3S = 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + 3^5 + 3^6. \qquad (2)$$

Перепишем равенства (1) и (2) так:

$$S = 1 + (3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + 3^5),$$
$$3S = (3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + 3^5) + 3^6.$$

Выражения, стоящие в скобках, одинаковы. Поэтому, вычитая из нижнего равенства верхнее, получаем:

$3S - S = 3^6 - 1,\ 2S = 3^6 - 1,$

$S = \frac{3^6 - 1}{2} = \frac{729 - 1}{2} = 364.$ ◁

Рассмотрим теперь произвольную геометрическую прогрессию $b_1,\ b_1q,\ \ldots,\ b_1q^n,\ \ldots$, знаменатель которой $q \neq 1$.

Пусть S_n — сумма n первых членов этой прогрессии:

$$S_n = b_1 + b_1q + b_1q^2 + \ldots + b_1q^{n-1}. \qquad (3)$$

Теорема. Сумма n первых членов геометрической прогрессии со знаменателем $q \neq 1$ равна

$$S_n = \frac{b_1(1 - q^n)}{1 - q}. \qquad (4)$$

Умножим обе части равенства (3) на q:

$$qS_n = b_1q + b_1q^2 + b_1q^3 + \ldots + b_1q^n. \qquad (5)$$

Перепишем равенства (3) и (5), выделив в них одинаковые слагаемые:

$$S_n = b_1 + (b_1q + b_1q^2 + \ldots + b_1q^{n-1}),$$
$$qS_n = (b_1q + b_1q^2 + b_1q^3 + \ldots + b_1q^{n-1}) + b_1q^n.$$

Выражения, стоящие в скобках, равны. Поэтому, вычитая из верхнего равенства нижнее, получаем:

$$S_n - qS_n = b_1 - b_1q^n.$$

Отсюда

$$S_n(1 - q) = b_1(1 - q^n), \qquad S_n = \frac{b_1(1 - q^n)}{1 - q}.$$ ○

Заметим, что если $q = 1$, то

$$S_n = \underbrace{b_1 + b_1 + \ldots + b_1}_{n \text{ слагаемых}} = b_1n, \text{ т. е. } S_n = b_1n.$$

Задача 2 Найти сумму первых пяти членов геометрической прогрессии $6,\ 2,\ \frac{2}{3},\ \ldots$.

▶ В этой прогрессии $b_1 = 6$, $q = \frac{1}{3}$. По формуле (4) находим:

$$S_5 = \frac{6\left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^5\right)}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{6\left(1 - \frac{1}{243}\right)}{\frac{2}{3}} = \frac{6 \cdot 242 \cdot 3}{2 \cdot 243} = \frac{242}{27}.$$ ◁

Задача 3 В геометрической прогрессии со знаменателем $q = \frac{1}{2}$ сумма первых шести членов равна 252. Найти первый член этой прогрессии.

▶ Воспользуемся формулой (4):

$$252 = \frac{b_1\left(1 - \frac{1}{2^6}\right)}{1 - \frac{1}{2}}.$$

Отсюда

$$252 = 2b_1\left(1 - \frac{1}{64}\right), \quad 252 = \frac{b_1 \cdot 63}{32}, \quad b_1 = 128. \triangleleft$$

Задача 4 Сумма n первых членов геометрической прогрессии равна -93. Первый член этой прогрессии равен -3, а знаменатель q равен 2. Найти n.

▶ Используя формулу (4), получаем:

$$-93 = \frac{-3(1 - 2^n)}{1 - 2}.$$

Отсюда

$$-31 = 1 - 2^n, \quad 2^n = 32, \quad 2^n = 2^5, \quad n = 5. \triangleleft$$

Задача 5 Последовательность 5, 15, 45, ..., 1215, ... является геометрической прогрессией. Найти сумму $5 + 15 + 45 + \ldots + 1215$.

▶ В этой прогрессии $b_1 = 5$, $q = 3$, $b_n = 1215$. Формулу суммы n первых членов преобразуем так:

$$S_n = \frac{b_1(1 - q^n)}{1 - q} = \frac{b_1 - b_1 q^{n-1} q}{1 - q} = \frac{b_1 - b_n q}{1 - q} = \frac{b_n q - b_1}{q - 1}.$$

Используя условия задачи, находим:

$$S_n = \frac{1215 \cdot 3 - 5}{3 - 1} = \frac{3645 - 5}{2} = 1820. \triangleleft$$

Упражнения

282 Найти сумму n первых членов геометрической прогрессии, если:

1) $b_1 = \frac{1}{2}$, $q = 2$, $n = 6$;
2) $b_1 = -2$, $q = \frac{1}{2}$, $n = 5$;
3) $b_1 = 1$, $q = -\frac{1}{3}$, $n = 4$;
4) $b_1 = -5$, $q = -\frac{2}{3}$, $n = 5$;
5) $b_1 = 6$, $q = 1$, $n = 200$;
6) $b_1 = -4$, $q = 1$, $n = 100$.

283 Найти сумму семи первых членов геометрической прогрессии:

1) 5, 10, 20, ...; 2) 2, 6, 18, ...

284 В геометрической прогрессии найти:

1) b_1 и b_7, если $q = 2$, $S_7 = 635$;
2) b_1 и b_8, если $q = -2$, $S_8 = 85$.

285 В геометрической прогрессии найти число n членов, если:

1) $S_n = 189$, $b_1 = 3$, $q = 2$;
2) $S_n = 635$, $b_1 = 5$, $q = 2$;
3) $S_n = 170$, $b_1 = 256$, $q = -\frac{1}{2}$;
4) $S_n = -99$, $b_1 = -9$, $q = -2$.

286 В геометрической прогрессии найти:

1) n и b_n, если $b_1 = 7$, $q = 3$, $S_n = 847$;
2) n и b_n, если $b_1 = 8$, $q = 2$, $S_n = 4088$;
3) n и q, если $b_1 = 2$, $b_n = 1458$, $S_n = 2186$;
4) n и q, если $b_1 = 1$, $b_n = 2401$, $S_n = 2801$.

287 Найти сумму чисел, если её слагаемые являются последовательными членами геометрической прогрессии:

1) $1 + 2 + 4 + \ldots + 128$; 2) $1 + 3 + 9 + \ldots + 243$;
3) $-1 + 2 - 4 + \ldots + 128$; 4) $5 - 15 + 45 - \ldots + 405$.

288 В геометрической прогрессии найти b_5 и S_4, если:

1) $b_2 = 15$, $b_3 = 25$;
2) $b_2 = 14$, $b_4 = 686$, $q > 0$.

289 Геометрическая прогрессия задана формулой n-го члена:

1) $b_n = 3 \cdot 2^{n-1}$, найти S_5;
2) $b_n = -2\left(\frac{1}{2}\right)^n$, найти S_6.

290 Доказать тождество

$$(x - 1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + 1) = x^n - 1,$$

где n — натуральное число, большее 1.

291 В геометрической прогрессии найти:

1) b_1 и q, если $b_3 = 135$, $S_3 = 195$;
2) q и b_3, если $b_1 = 12$, $S_3 = 372$.

292 В геометрической прогрессии найти:

1) q, если $b_1 = 1$ и $b_3 + b_5 = 90$;
2) q, если $b_2 = 3$ и $b_4 + b_6 = 60$;
3) S_{10}, если $b_1 - b_3 = 15$ и $b_2 - b_4 = 30$;
4) S_5, если $b_3 - b_1 = 24$ и $b_5 - b_1 = 624$.

Упражнения к главе IV

293 Вычислить три первых члена последовательности, заданной формулой n-го члена:

1) $a_n = n(n+3)$; 2) $a_n = 4^n$; 3) $a_n = 5 \cdot 2^n$; 4) $a_n = \sqrt{n^2+1}$.

294 Вычислить десятый и тридцатый члены последовательности, заданной формулой n-го члена:

1) $a_n = \dfrac{n-1}{n+1}$; 2) $a_n = \dfrac{n+9}{2n-1}$;

3) $a_n = |n-15| - 5$; 4) $a_n = 10 - |n-20|$.

295 Числовая последовательность задана рекуррентной формулой $a_{n+1} = 1 - 0{,}5a_n$ и условием $a_1 = 2$. Вычислить седьмой член этой последовательности.

296 Найти разность арифметической прогрессии и записать её четвёртый и пятый члены:

1) $4,\ 4\frac{1}{3},\ 4\frac{2}{3},\ \ldots$; 2) $3\frac{1}{2},\ 3,\ 2\frac{1}{2},\ \ldots$;

3) $1,\ 1+\sqrt{3},\ 1+2\sqrt{3},\ \ldots$; 4) $\sqrt{2},\ \sqrt{2}-3,\ \sqrt{2}-6,\ \ldots$.

297 Доказать, что последовательность, заданная формулой n-го члена $a_n = -2(1-n)$, является арифметической прогрессией.

298 В арифметической прогрессии вычислить:

1) a_5, если $a_1 = 6$, $d = \frac{1}{2}$;

2) a_7, если $a_1 = -3\frac{1}{3}$, $d = -\frac{1}{3}$.

299 Найти сумму двадцати первых членов арифметической прогрессии, если:

1) $a_1 = -1$, $a_2 = 1$; 2) $a_1 = 3$, $a_2 = -3$.

300 Найти сумму n первых членов арифметической прогрессии, если:

1) $a_1 = -2$, $a_n = -60$, $n = 10$;

2) $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_n = 25\frac{1}{2}$, $n = 11$;

3) $a_1 = -\frac{1}{2}$, $a_n = 13\frac{1}{2}$, $n = 8$;

4) $a_1 = 48$, $a_n = 3$, $n = 11$.

301 Найти сумму, если её слагаемые — последовательные члены арифметической прогрессии:

1) $-38 + (-33) + (-28) + \ldots + 12$;

2) $-17 + (-14) + (-11) + \ldots + 13$.

302 Найти знаменатель геометрической прогрессии и записать четвёртый и пятый её члены:

1) $3,\ 1,\ \frac{1}{3},\ \ldots$; 2) $\frac{1}{4},\ -\frac{1}{8},\ \frac{1}{16},\ \ldots$;

3) $3,\ \sqrt{3},\ 1,\ \ldots$; 4) $5,\ -5\sqrt{2},\ 10,\ \ldots$.

303 Записать формулу n-го члена геометрической прогрессии:

1) $-2,\ 4,\ -8,\ \ldots$; 2) $-\frac{1}{2},\ 1,\ -2,\ \ldots$.

304 В геометрической прогрессии найти b_n, если:

1) $b_1 = 2,\ q = 2,\ n = 6$; 2) $b_1 = \frac{1}{8},\ q = 5,\ n = 4$;

3) $b_1 = 5,\ q = -2,\ n = 5$; 4) $b_1 = -\frac{1}{6},\ q = -3,\ n = 6$.

305 Найти сумму n первых членов геометрической прогрессии, если:

1) $b_1 = \frac{1}{2},\ q = -4,\ n = 5$; 2) $b_1 = 2,\ q = -\frac{1}{2},\ n = 10$;

3) $b_1 = 10,\ q = 1,\ n = 6$; 4) $b_1 = 5,\ q = -1,\ n = 9$.

306 Найти сумму n первых членов геометрической прогрессии:

1) $128,\ 64,\ 32,\ \ldots,\ n = 6$; 2) $162,\ 54,\ 18,\ \ldots,\ n = 5$;

3) $\frac{2}{3},\ \frac{1}{2},\ \frac{3}{8},\ \ldots,\ n = 5$; 4) $\frac{3}{4},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \ldots,\ n = 4$;

5) $-\frac{1}{8},\ -\frac{1}{2},\ -2,\ \ldots,\ n = 4$; 6) $-4,\ 8,\ -16,\ \ldots,\ n = 5$.

Проверь себя!

1 Вычислить первые три члена последовательности, которая задана формулой n-го члена $a_n = \frac{n^2 - n}{2}$.

2 В арифметической прогрессии $a_1 = 2,\ d = -3$. Найти a_{10} и сумму первых десяти её членов.

3 В геометрической прогрессии $b_1 = 4,\ q = \frac{1}{2}$. Найти b_6 и сумму первых шести её членов.

4 Доказать, что последовательность $1,\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{9},\ \ldots$ является геометрической прогрессией, и найти сумму первых пяти её членов.

307 Числовая последовательность задана рекуррентной формулой $a_{n+2}=\frac{a_n+a_{n+1}}{2}$ и условиями $a_1=-1$, $a_2=3$. Вычислить пятый член последовательности.

308 Найти разность арифметической прогрессии, если $a_1=2\frac{1}{2}$ и $a_8=23\frac{1}{2}$.

309 Записать первые 5 членов арифметической прогрессии, если:

1) $a_1=5$, $a_3=15$; 2) $a_3=8$, $a_5=2$.

310 Между числами -10 и 5 вставить число так, чтобы получились 3 последовательных члена арифметической прогрессии.

311 Найти девятнадцатый и первый члены арифметической прогрессии, если:

1) $a_{13}=28$, $a_{20}=38$; 2) $a_{18}=-6$, $a_{20}=6$.

312 При каком значении x являются последовательными членами арифметической прогрессии числа:

1) $3x$, $\frac{x+2}{2}$, $2x-1$; 2) $3x^2$, 2, $11x$?

313 Сколько нужно взять последовательных нечётных натуральных чисел, начиная с 5, чтобы их сумма была равна 252?

314 Найти a_n и d арифметической прогрессии, у которой:

1) $a_1=40$, $n=20$, $S_{20}=-40$;
2) $a_1=\frac{1}{3}$, $n=16$, $S_{16}=-10\frac{2}{3}$.

315 Для геометрической прогрессии вычислить:

1) b_9, если $b_1=4$ и $q=-1$;
2) b_7, если $b_1=1$ и $q=\sqrt{3}$.

316 Найти пятый член геометрической прогрессии, если:

1) $b_2=\frac{1}{2}$, $b_7=16$; 2) $b_3=-3$, $b_6=-81$;

3) $b_2=4$, $b_4=1$; 4) $b_4=-\frac{1}{5}$, $b_6=-\frac{1}{125}$.

317 Между числами 4 и 9 вставить положительное число так, чтобы получилось 3 последовательных члена геометрической прогрессии.

318 Отдыхающий, следуя совету врача, загорал в первый день 5 мин, а в каждый последующий день увеличивал время пребывания на солнце на 5 мин. В какой день недели время его пребывания на солнце будет равно 40 мин, если он начал загорать в среду?

319 Настенные русские часы с кукушкой устроены так, что кукушка кукует 1 раз, когда часы показывают половину очередного часа, и каждый час столько раз, каково время от 1 до 12. Сколько раз прокукует кукушка за сутки?

320 Найти первый член и разность арифметической прогрессии, если $a_1 + a_2 + a_3 = 15$ и $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 = 80$.

321 Найти первый член и разность арифметической прогрессии, если $a_1 + a_2 + a_3 = 0$ и $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 50$.

322 Доказать, что для геометрической прогрессии справедливо равенство $b_n^2 = b_{n+k} b_{n-k}$, где $n > k$. Вычислить b_7, если $b_3 b_{11} = 225$.

323 Доказать, что для геометрической прогрессии справедливо равенство $b_n b_k = b_{n+l}\, b_{k-l}$, где $k > l$. Вычислить $b_1 b_7$, если $b_3 b_5 = 72$.

324 Рост дрожжевых клеток происходит делением каждой клетки на две части. Сколько стало клеток после десятикратного их деления, если первоначально было a клеток?

325 Из пункта A в пункт B одновременно с постоянными скоростями отправились пешеход и велосипедист. Велосипедист, прибыв в пункт B, повернул назад и встретил пешехода через 1 ч после начала движения из пункта A. После встречи с пешеходом велосипедист снова поехал в пункт B, а по прибытии туда повернул обратно и встретился с пешеходом через $\frac{2}{3}$ ч после первой встречи. После второй встречи велосипедист опять поехал в пункт B, а доехав, повернул обратно и т. д. Найти время, за которое пешеход пройдёт путь AB.

326 Музыкальная октава делится на 12 равных интервалов-полутонов. Частота каждого последующего звука приблизительно в 1,059 раза больше частоты предыдущего. Во сколько раз нота *соль* выше ноты *до* той же октавы (вычисления провести на микрокалькуляторе)?

V
глава

Случайные события

§ 22 События

1. Невозможные, достоверные и случайные события

В жизни под событием понимают любое явление, которое происходит или не происходит. Событиями являются и результаты испытаний (опытов), наблюдений и измерений, производимых людьми. Все события можно подразделить на *невозможные, достоверные* и *случайные.*

Невозможным называют событие, которое в данных условиях произойти не может.

Приведём примеры невозможных событий:
1) вода в реке замёрзла при температуре +25 °C;
2) при бросании игральной кости (т. е. кубика, на гранях которого отмечены очки от 1 до 6) появилось 7 очков.

Достоверным называют событие, которое в данных условиях обязательно произойдёт.

Например, достоверными являются события:
1) после четверга наступила пятница;
2) при бросании игральной кости выпало число очков, меньшее семи.

Случайным называют событие, которое в данных условиях может произойти, а может и не произойти.

Случайными являются, например, следующие события:

1) при телефонном звонке абонент оказался занят;

2) при бросании игральной кости выпало 2 очка.

2. Совместные и несовместные события

Два события, которые в данных условиях могут происходить одновременно, называют *совместными*, а те, которые не могут происходить одновременно, — *несовместными*.

Например, события «пошёл дождь» и «наступило утро» являются совместными, а события «наступило утро» и «наступила ночь» — несовместными.

Рассмотрим события, связанные с одним бросанием игральной кости: 1) выпало 2 очка; 2) выпало 5 очков; 3) выпало более 2 очков; 4) выпало число очков, кратное двум. Среди них совместными будут три пары: 1-е и 4-е (число 2 чётное); 2-е и 3-е (5 очков больше, чем 2); 3-е и 4-е (например, 4 очка). Несовместными будут события: 1-е и 2-е (одновременно не могут выпасть 2 разных числа); 1-е и 3-е (более 2 очков, т. е. 3, 4, 5 или 6 одновременно с 2 очками появиться не могут); 2-е и 4-е (число 5 не кратно 2).

3. Равновозможные события

Рассмотрим группы событий:

1) «появление орла» и «появление решки» при одном бросании монеты (рис. 20);

2) «появление 1 очка», «появление 2 очков», ..., «появление 6 очков» при одном бросании игральной кости;

3) «падение бутерброда маслом вверх» и «падение бутерброда маслом вниз»;

4) «изъятие из полного набора домино дубля» и «изъятие из полного набора домино костяшки с разными очками».

Орёл

Решка

Рис. ***20***

В примерах 1 и 2 нет оснований полагать, что в наступлении одного из событий есть какое-то преимущество (если монета и кубик правильные). Такие события называются *равновозможными*. Часто равновозможность событий удаётся установить из соображений симметрии.

Примеры 3 и 4 демонстрируют образцы *неравновозможных* событий. Действительно, бутерброд чаще падает маслом вниз (из-за того, что после намазывания хлеба маслом центр тяжести бутерброда смещается из центра его симметрии в сторону слоя масла). При изъятии одной костяшки из полного набора домино, скорее всего, появится костяшка с разными очками (так как дублей в наборе домино всего 7, а остальных костяшек 21).

Упражнения

В упражнениях **327—331** описаны условия и происходящие в них события. Для каждого из этих событий (устно) определить, каким оно является: невозможным, достоверным или случайным.

327 Из 25 учащихся класса: 1) двое справляют день рождения 30 января; 2) все справляют день рождения 30 января.

328 Случайным образом открывается учебник литературы и находится второе слово на левой странице. Это слово начинается: 1) с буквы К; 2) с буквы Ь.

329 Из списка журнала IX класса (в котором есть и девочки, и мальчики) случайным образом выбран один ученик: 1) это мальчик; 2) выбранному ученику 14 лет; 3) выбранному ученику 15 месяцев; 4) этому ученику больше двух лет.

330 Сегодня в Сочи барометр показывает нормальное атмосферное давление. При этом: 1) у жительницы Сочи вода в кастрюле закипела при $t = 80$ °C; 2) когда температура воздуха упала до -5 °C, вода в луже замёрзла.

331 Бросают две игральные кости: 1) на первой кости выпало 3 очка, а на второй — 5 очков; 2) сумма выпавших на двух костях очков равна 1; 3) сумма выпавших на двух костях очков равна 13; 4) на обеих костях выпало по 3 очка; 5) сумма очков на двух костях меньше 15.

В упражнениях **332—334** среди данных пар событий указать, какие являются совместными, а какие — несовместными.

332 В сыгранной Катей и Славой партии в шахматы: 1) Катя выиграла; Слава проиграл; 2) Катя проиграла; Слава проиграл.

333 Брошена игральная кость. На верхней грани оказалось: 1) 6 очков; 5 очков; 2) 6 очков; чётное число очков.

334 Из набора домино (рис. 21) вынута одна костяшка, на ней: 1) одно число очков больше 3, другое число 5; 2) одно чис-

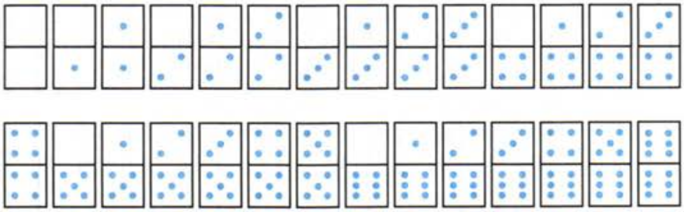


Рис. 21

ло не меньше 6, другое число не больше 6; 3) одно число 2, сумма обоих чисел равна 9; 4) оба числа больше 3, сумма чисел равна 7.

335 Из событий: 1) «идёт дождь»; 2) «на небе нет ни облачка»; 3) «наступило лето» — составить всевозможные пары и выявить среди них пары совместных и пары несовместных событий.

336 Из событий: 1) «наступило утро»; 2) «сегодня по расписанию 6 уроков»; 3) «сегодня первое января»; 4) «температура воздуха в Салехарде +20 °С» — составить всевозможные пары и выявить среди них пары совместных и пары несовместных событий.

337 Имеется правильная треугольная пирамида — тетраэдр (рис. 22). Одна из её граней серая, а 3 другие белые. Тетраэдр бросают на стол и наблюдают за гранью, которой он соприкасается со столом. Являются ли равновозможными события «тетраэдр упал на серую грань» и «тетраэдр упал на белую грань»?

Тетраэдр ***Развёртка тетраэдра***

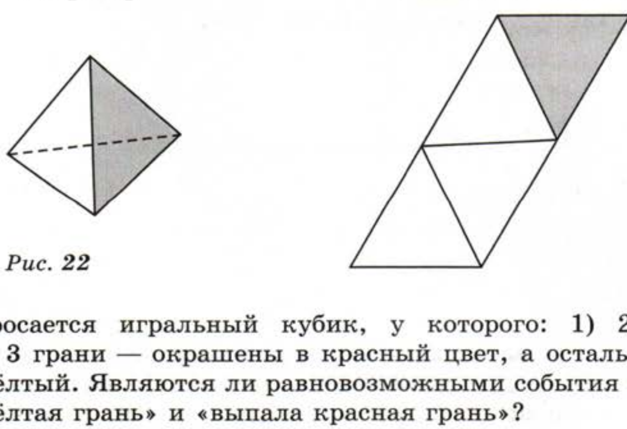


Рис. 22

338 Бросается игральный кубик, у которого: 1) 2 грани; 2) 3 грани — окрашены в красный цвет, а остальные — в жёлтый. Являются ли равновозможными события «выпала жёлтая грань» и «выпала красная грань»?

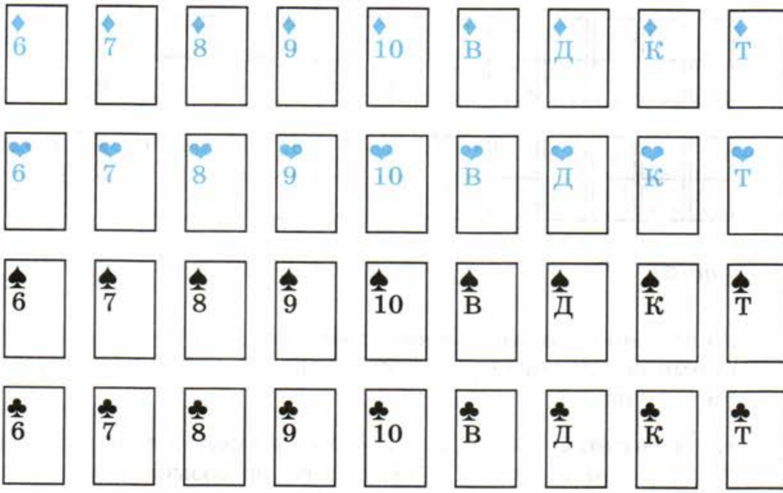


Рис. 23

339 Из полной колоды в 36 карт (рис. 23) наугад вынимается одна карта. Являются ли равновозможными события:

1) «вынута карта красной масти» и «вынута карта чёрной масти»;

2) «вынут король» и «вынута дама»;

3) «вынута карта бубновой масти» и «вынута карта червовой масти»;

4) «вынута карта пиковой масти» и «вынута карта красной масти»;

5) «вынута шестёрка треф» и «вынута дама пик»?

340 Из полной колоды карт вынимается одна карта. Выяснить, являются совместными или несовместными события:

1) «вынута карта красной масти» и «вынут валет»;

2) «вынут король» и «вынут туз».

§ 23 Вероятность события

Встречаясь в жизни с различными событиями, мы часто даём оценку степени их достоверности. При этом произносим, например, такие слова:

«Это невероятно!» — говорим о невозможном событии, например, о том, что вода в холодильнике закипела.

«Маловероятно, что сегодня будет дождь», — говорим, глядя на безоблачное небо летним утром.

«Наверняка это случится!», «Я уверен, что это произойдёт!» — говорим, например, о предполагаемой двойке за контрольную работу, если изучаемая тема не была усвоена.

«Шансы равны», «Один к одному» или «Шансы пятьдесят на пятьдесят» — говорим, например, о возможности победы в соревнованиях двух одинаково подготовленных спортсменов или когда делаем ставку на орла или решку при подбрасывании монеты.

Вопрос о возможности *измерения степени достоверности* наступления какого-либо события задавали себе ещё в XVII в. французские учёные Блез Паскаль (1623—1662) и Пьер Ферма (1601—1665). Наблюдая за игрой в кости, Паскаль высказал идею измерения степени уверенности в выигрыше (шансы выигрыша) некоторым числом. Действительно, рассуждал Паскаль, когда игрок бросает игральную кость, он не знает, какое число очков выпадет. Но он знает, что каждое из чисел 1, 2, 3, 4, 5 и 6 имеет одинаковую долю успеха (равные шансы) в своём появлении. Игрок также знает, что появление одного из этих чисел в каждом *испытании* (броске) — событие достоверное. Если *принять возможность наступления достоверного события за* 1, то возможность появления, например, шестёрки (равно как и любого другого числа очков) в 6 раз меньше, т. е. равна $\frac{1}{6}$.

Долю успеха того или иного события математики стали называть *вероятностью* этого события и обозначать буквой P (по первой букве латинского слова *probabilitas* — вероятность).

Если буквой A обозначить событие «выпало 6 очков» при одном бросании игральной кости, то вероятность события A обозначают $P(A)$ и записывают $P(A)=\frac{1}{6}$ (читается: «Пэ от A равно одной шестой» или «Вероятность события A равна одной шестой»).

Задача 1 Поверхность рулетки (её вид сверху изображён на рисунке 24) разделена диаметрами на 4 равные части. Найти вероятность того, что раскрученная стрелка рулетки остановится на секторе 3.

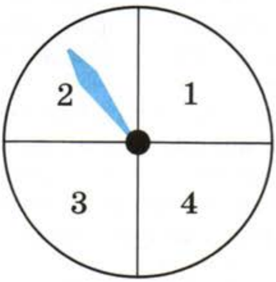


Рис. 24

▶ Так как площади секторов поверхности рулетки одинаковы, то в одном испытании с раскручиванием стрелки существуют 4 равновозможных события (*исхода испытания*); стрелка остановится: 1) на секторе 1; 2) на секторе 2; 3) на секторе 3; 4) на секторе 4. Достоверное событие — «стрелка остановится на каком-либо из секторов». Вероятность наступления достоверного события равна 1, а вероятность события A — «стрелка остановится на секторе 3», в 4 раза меньше, т. е. $P(A)=\frac{1}{4}$.

Ответ $\frac{1}{4}$. ◁

Помимо рассмотренных выше *элементарных событий*, можно изучать и более сложные события. Например, такие: «выпадение чётного числа очков (2, 4 или 6) при одном бросании игральной кости»; «остановка стрелки рулетки не на секторе 2» и т. д. Рассмотрим событие A — «выпало чётное число очков» в результате одного бросания игральной кости. Это событие наступает в 3 случаях (исходах) — когда выпадает или 2, или 4, или 6 очков. Говорят, что это *благоприятствующие* событию A исходы. Три благоприятствующих исхода составляют половину от *всех возможных* исходов испытания (их 6), поэтому вероятность события A равна:

$$P(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}.$$

Если в некотором испытании существует n равновозможных попарно несовместных исхода и m из них благоприятствуют событию A, то *вероятностью наступления события* A называют отношение $\frac{m}{n}$ и записывают

$$P(A)=\frac{m}{n}. \qquad (1)$$

Задача 2 Найти вероятность появления при одном бросании игральной кости числа очков, большего 4.

▶ Событию A — «появлению числа очков, большего 4», благоприятствуют 2 исхода (появление 5 и появление 6 очков), т. е. $m = 2$. Число всех равновозможных исходов $n = 6$, поэтому $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

Ответ $\frac{1}{3}$. ◁

Задача 3 Поверхность рулетки разделена на 8 равных секторов. Найти вероятность того, что после раскручивания стрелка рулетки остановится на закрашенной части рулетки (рис. 25).

Рис. 25

▶ Существует 8 равновозможных исходов испытания: стрелка остановится на секторе 1, на секторе 2, ..., на секторе 8, т. е. $n = 8$. В закрашенную часть рулетки попадают 3 сектора (4, 5 и 6-й), т. е. число благоприятствующих исходов $m = 3$. Тогда $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{3}{8}$.

Ответ $\frac{3}{8}$. ◁

О вероятностях наступления достоверных, невозможных и случайных событий на основании формулы (1) можно рассуждать следующим образом. Если событие A достоверное, то ему благоприятствуют все возможные исходы испытания, т. е. $m = n$. Тогда $P(A) = \frac{m}{n} = 1$.

Если событие A невозможное, то не существует исходов, благоприятствующих его появлению, т. е. $m = 0$. Тогда $P(A) = \frac{0}{n} = 0$.

Если событие A случайное, то число m благоприятствующих его появлению исходов удовлетворяет условию $0 < m < n$. Тогда $0 < P(A) = \frac{m}{n} < 1$.

Таким образом, для вероятности $P(A)$ любого события A справедливы неравенства $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$.

Упражнения

341 Перечислить все элементарные равновозможные события, которые могут произойти в результате: 1) подбрасывания монеты; 2) подбрасывания игрального кубика; 3) подбрасывания тетраэдра с гранями, занумерованными числами 1, 2, 3, 4; 4) раскручивания стрелки рулетки, поверхность которой разделена на 5 одинаковых секторов, обозначенных буквами A, B, C, D и E.

342 Заполнить таблицу.

Номер задания	Испытание	Число всех элементарных равновозможных событий — исходов испытания (n)	Изучаемое событие A	Число исходов, благоприятствующих событию A (m)	Вероятность события A $\left(P(A)=\frac{m}{n}\right)$
1	Подбрасывание игрального кубика		Выпавшее число очков нечётно		
2	Подбрасывание игрального кубика		Выпавшее число очков кратно трём		
3	Изъятие из полного набора домино одной костяшки		Изъята костяшка с очками 2 и 6		
4	Изъятие из полного набора домино одной костяшки		Изъят дубль		
5	Раскручивание стрелки рулетки, разделённой на 8 равных секторов, занумерованных числами от 1 до 8		Остановка стрелки на секторе с номером, кратным 4		
6	Раскручивание стрелки рулетки, разделённой на 8 равных секторов, занумерованных числами от 1 до 8		Остановка стрелки на секторе, номер которого не больше 6		

343 В ящике находятся 2 белых и 3 чёрных шара. Наугад вынимается один шар. Какова вероятность того, что вынутый шар: 1) белый; 2) чёрный; 3) зелёный; 4) белый или чёрный?

344 В ящике находятся 2 белых, 3 чёрных, 4 красных шара. Наугад вынимается один шар. Какова вероятность того, что этот шар: 1) белый; 2) чёрный; 3) красный; 4) не белый; 5) не чёрный; 6) не красный?

345 На одинаковых карточках написаны числа от 1 до 10 (на каждой карточке — одно число). Карточки положили на стол, перевернули числами вниз и перемешали. Какова вероятность того, что на вынутой карточке окажется число: 1) 7; 2) чётное; 3) кратное 3; 4) кратное 4; 5) делящееся на 5; 6) простое?

346 Таня забыла последнюю цифру номера телефона знакомой девочки и набрала её наугад. Какова вероятность того, что Таня попала к своей знакомой?

347 В лотерее 1000 билетов, среди которых 20 выигрышных. Приобретается один билет. Какова вероятность того, что этот билет: 1) выигрышный; 2) невыигрышный?

348 Студент при подготовке к экзамену не успел выучить один из тех 25 билетов, которые будут предложены на экзамене. Какова вероятность того, что студенту достанется на экзамене выученный билет?

349 Допустим, что 5 раз подбрасывалась монета и каждый раз выпадал орёл. Какова вероятность того, что при новом броске выпадет орёл?

350 Из колоды карт (36 листов) наугад вынимается одна карта. Какова вероятность того, что эта карта: 1) шестёрка треф; 2) семёрка; 3) король красной масти; 4) карта бубновой масти с числом; 5) карта червовой масти с чётным числом?

351 Деревянный окрашенный кубик $3 \times 3 \times 3$ распилили на 27 одинаковых кубиков $1 \times 1 \times 1$ (рис. 26). Кубики перемешали и выбрали наугад один из них. Найти вероятность события:

1) A — окрашены ровно 3 грани кубика;
2) B — окрашены ровно 2 грани;
3) C — окрашена только одна грань;
4) D — нет ни одной окрашенной грани.

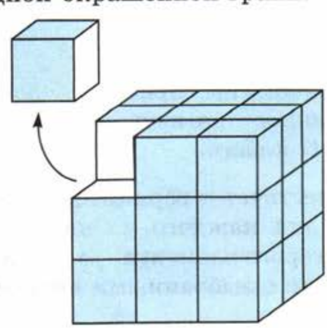


Рис. 26

§ 24 Решение вероятностных задач с помощью комбинаторики

Задача 1 Брошены две монеты. Какова вероятность того, что появятся: 1) два орла; 2) орёл и решка?

▶ Составим таблицу вариантов, позволяющую определить все возможные исходы в результате бросания двух монет. Появление орла в таблице обозначено буквой О, а появление решки — буквой Р.

1-я монета	2-я монета	
	О	Р
О	ОО	ОР
Р	РО	РР

Из таблицы видно, что число возможных исходов в испытании $n = 2 \cdot 2 = 4$.

1) Событию A — появлению двух орлов благоприятствует один исход (ОО), т. е. $m = 1$, поэтому $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{1}{4}$.

2) Событию B — появлению орла и решки благоприятствуют 2 исхода (ОР и РО), т. е. $m = 2$. Тогда $P(B) = \frac{m}{n} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

Ответ 1) $\frac{1}{4}$; 2) $\frac{1}{2}$. ◁

Напомним *правило произведения*, сформулированное при изучении элементов комбинаторики в VII классе.

Если существует n вариантов выбора первого элемента и для каждого из них есть m вариантов выбора второго элемента, то существует $n \cdot m$ различных пар с выбранными первым и вторым элементами.

Задача 2 Брошены две игральные кости: одна белого, другая красного цвета. Какова вероятность того, что: 1) на белой кости выпадет 6 очков, а на красной — нечётное число очков; 2) на одной кости выпадет 6 очков, а на другой — нечётное число очков?

▶ Согласно правилу произведения число возможных исходов $n = 6 \cdot 6 = 36$. Составим таблицу возможных исходов бросания двух игральных костей.

Белая кость	Красная кость					
	1	2	3	4	5	6
1	11	12	13	14	15	**16**
2	21	22	23	24	25	26
3	31	32	33	34	35	**36**
4	41	42	43	44	45	46
5	51	52	53	54	55	**56**
6	**61**	62	**63**	64	**65**	66

1) Исходы, благоприятствующие событию A — появлению на белой кости 6 очков, на красной — нечётного числа очков, выделены в последней строке таблицы. Их 3, т. е. $m = 3$. Таким образом, $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$.

2) Исходы, благоприятствующие событию B — появлению на одной кости 6 очков, а на другой — нечётного числа очков, выделены в таблице исходов (к трём исходам, рассмотренным в предыдущем задании, добавляются ещё три за счёт появления 6 очков на второй кости и нечётного числа очков на первой). Таким образом, $m = 6$, и, следовательно, $P(B) = \frac{m}{n} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

Ответ 1) $\frac{1}{12}$; 2) $\frac{1}{6}$. ◁

Задача 3 Какова вероятность того, что сумма очков, выпавших на двух брошенных костях, равна 5?

▶ Общее число исходов испытания, как и в задаче 2, $n = 36$. Выпишем из последней таблицы все исходы, благоприятствующие интересующему нас событию A — сумма очков на двух костях равна 5:

14; 23; 32; 41.

Таким образом, $m = 4$ и $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$.

Ответ $\frac{1}{9}$. ◁

Задача 4* В ящике имеется 3 одинаковых по размеру кубика: красный (к), чёрный (ч) и белый (б). Вытаскивая их наугад, кладём 3 кубика на стол последовательно один за другим. Какова вероятность того, что появится последовательность кубиков «ч б к»?

▶ Общее число n исходов расстановки в ряд вынутых из ящика 3 кубиков (согласно применённому дважды правилу произведения) равно $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ (см. на рисунке 27 дерево исходов). Только один из этих исходов является благоприятствующим событию «ч б к», т. е. $m = 1$. Таким образом, вероятность интересующего нас события $P = \frac{1}{6}$.

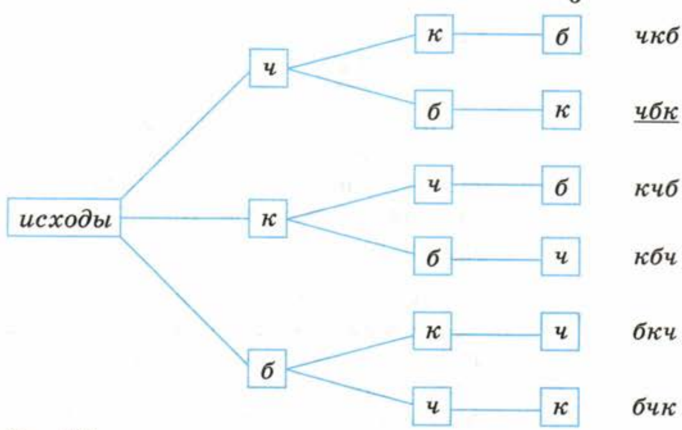


Рис. 27

Ответ $\frac{1}{6}$. ◁

Задача 5* В ящике имеется 3 одинаковых по размеру кубика: два чёрных ($ч_1$ и $ч_2$) и один красный (к). Вытаскивая кубики наугад один за другим, их ставят последовательно на стол. Какова вероятность того, что сначала будут вынуты два чёрных кубика, а последним — красный?

▶ Общее число исходов, как и в предыдущей задаче, равно 6 (см. рисунок 28 с деревом исходов). Однако благоприятствующими рассматриваемому со-

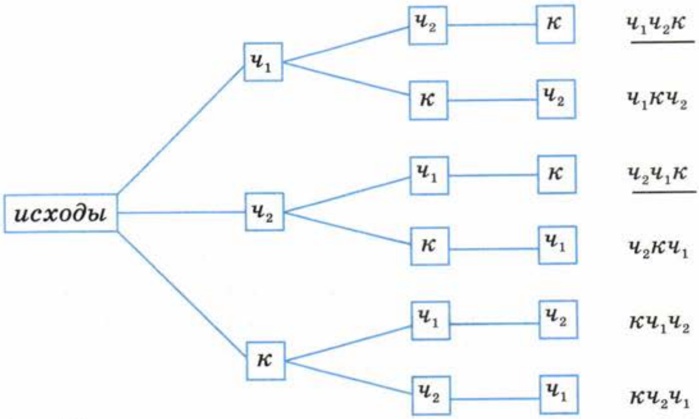


Рис. 28

бытию будут 2 исхода: «$ч_1$ $ч_2$ к» и «$ч_2$ $ч_1$ к», поэтому вероятность изучаемого события равна $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$.

Ответ $\frac{1}{3}$. ◁

Задача 6* В коробке лежат 2 белых и 3 чёрных шара. Наугад вынимают одновременно 2 шара. Найти вероятность события: 1) A — вынуты 2 белых шара; 2) B — вынуты 2 чёрных шара; 3) C — вынуты белый и чёрный шары.

▶ Из 5 шаров можно составить $\frac{(5-1)5}{2}=10$ различных пар (см. граф на рисунке 29). Таким образом, число всевозможных исходов испытания $n = 10$.

1) Событию A благоприятствует единственная пара белых шаров, т. е. $m = 1$. Находим $P(A)=\frac{m}{n}=\frac{1}{10}$.

2) Событию B благоприятствуют 3 исхода — 3 различные пары из 3 чёрных шаров (см. граф на рисунке 30), т. е. $m = 3$. Таким образом, $P(B)=\frac{m}{n}=\frac{3}{10}$.

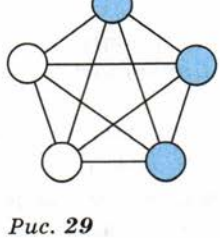


Рис. 29

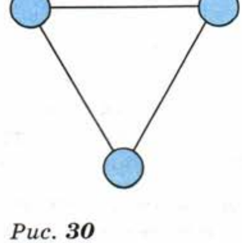


Рис. 30

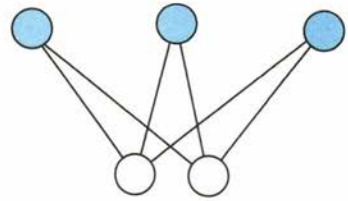


Рис. 31

3) Событию C благоприятствуют 6 исходов (см. граф на рисунке 31), т. е. $m = 6$. Отсюда $P(C) = \frac{m}{n} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$.

Ответ 1) $\frac{1}{10}$; 2) $\frac{3}{10}$; 3) $\frac{3}{5}$. ◁

Упражнения

352 Бросают две монеты. Какова вероятность того, что: 1) выпадут две решки; 2) выпадут орёл и решка?

353 Бросают две монеты — копейку и пятак. Какова вероятность того, что: 1) на обеих монетах появится орёл; 2) на копейке появится орёл, а на пятаке — решка?

354 Бросают две игральные кости — жёлтую и зелёную. Какова вероятность того, что появятся:
1) на жёлтой кости 2 очка, на зелёной 3 очка; 2) на одной кости 2 очка, а на другой 3 очка; 3) на жёлтой кости 5 очков; 4) на жёлтой кости чётное число очков; 5) на обеих костях чётные очки; 6) на жёлтой кости число очков, кратное 3, а на зелёной — чётное число очков; 7) на обеих костях одинаковые очки; 8) очки, сумма которых равна 3; 9) очки, сумма которых не больше 3; 10) очки, сумма которых равна 11; 11) очки, сумма которых равна 10; 12) очки, сумма которых не меньше 10?

355 Брошены две игральные кости. Найти вероятность того, что произведение выпавших на костях очков равно: 1) 5; 2) 4; 3) 10; 4) 12.

356 На трёх карточках написаны цифры 1, 2 и 3 (на каждой карточке по одной цифре). Случайным образом из этого набора выбирают последовательно по одной карточке и кладут в ряд, образуя трёхзначное число. Какова вероятность того, что образуется число: 1) 321; 2) 231?

357 4 одинаковых шара пронумерованы числами 1, 2, 3, 4 и сложены в ящик. Случайным образом из ящика извлекают по одному шару. Какова вероятность того, что шары были извлечены в последовательности: 1) 4, 2, 1, 3; 2) 4, 3, 2, 1?

358 Брошены 3 игральные кости. Какова вероятность того, что: 1) на всех костях выпало по 2 очка; 2) на двух костях выпало по 2 очка, а на одной — 6 очков?

359 На каждой из двух карточек написана цифра 1, а на третьей — цифра 2. Эти три карточки перемешиваются и случайным образом выкладываются в ряд. Какова вероятность того, что образовалось число: 1) 112; 2) 121?

360 Из 4 шаров, занумерованных числами 1, 2, 3 и 4, наугад выбирают 2 шара. Какова вероятность того, что вынутые шары имеют номера 2 и 3?

361 В ящике лежат 1 белый и 3 чёрных шара. Наугад вынимают 2 шара. Какова вероятность того, что вынуты: 1) 2 чёрных шара; 2) белый и чёрный шары?

362 В ящике находятся 2 белых и 2 чёрных шара. Наугад вынимают 2 шара. Найти вероятность того, что вынуты: 1) 2 белых шара; 2) один белый и один чёрный шары?

363 В ящике находятся 4 белых и 1 чёрный шар. Наугад вынимают 2 шара. Найти вероятность того, что вынуты: 1) 2 белых шара; 2) белый и чёрный шары.

364 Из колоды карт (36 листов) наугад вынимают 2 карты. Какова вероятность того, что это: 1) дама треф и валет пик; 2) две шестёрки?

§ 25 Геометрическая вероятность

Существует класс задач, в которых оценить вероятность случайного события можно из геометрических соображений.

В § 23 мы уже находили вероятность того, что стрелка рулетки остановится на одном из четырёх равных секторов. А как следовало поступить, если бы поверхность рулетки была разделена не на равные секторы? После раскручивания стрелка может случайным образом остановиться в любой части круга рулетки. *Вероятность того, что стрел-*

ка остановится на интересующем нас секторе, естественно считать равной отношению площади этого сектора $S_{сект}$ к площади всего круга S:

$$P = \frac{S_{\text{сект}}}{S}. \quad (1)$$

Задача 1 Сектор А занимает половину рулетки, а её вторая половина разделена на два одинаковых сектора Б и В (рис. 32). Какова вероятность того, что после раскручивания стрелка рулетки остановится: 1) на секторе А; 2) на секторе В?

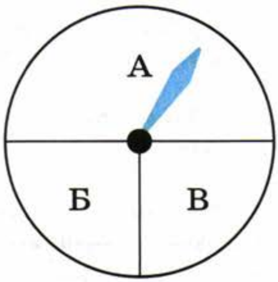


Рис. 32

▶ 1) Площадь $S_А$ сектора А в два раза меньше площади S всего круга, поэтому вероятность остановки стрелки на секторе А равна $P = \frac{S_А}{S} = \frac{1}{2}$.

2) Площадь $S_В$ сектора В в 4 раза меньше площади S всего круга, поэтому вероятность остановки стрелки на секторе В равна $P = \frac{S_В}{S} = \frac{1}{4}$.

Ответ 1) $\frac{1}{2}$; 2) $\frac{1}{4}$. ◁

Задача 2 На отрезке $AB = 15$ см произвольным образом выделен отрезок $MN = 3$ см (рис. 33). На отрезке AB случайным образом отмечается точка X. Какова вероятность того, что эта точка попадёт на отрезок MN?

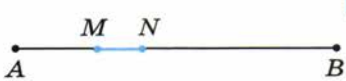


Рис. 33

▶ Вероятность P попадания точки X на отрезок MN, составляющий часть отрезка AB, определяется по формуле

$$P = \frac{MN}{AB}. \quad (2)$$

При $MN = 3$ см, $AB = 15$ см вероятность попадания точки X на отрезок MN равна:

$$P = \frac{MN}{AB} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}.$$

Ответ $\frac{1}{5}$. ◁

В формулах (1) и (2) можно рассматривать попадание стрелки на сектор площади $S_{\text{сект}}$ и попадание точки X на отрезок длиной MN как благоприятствующие исходы рассматриваемых испытаний, а площадь всего круга и длину отрезка AB как все возможные исходы соответствующих испытаний.

Упражнения

365 Поверхность рулетки разделена на секторы следующим образом: равные секторы 1 и 2 занимают половину площади круга, а вторая его половина разделена на три равных сектора 3, 4 и 5 (рис. 34). Какова вероятность того, что после раскручивания стрелка рулетки остановится на: 1) секторе 1; 2) секторе 3; 3) части поверхности рулетки, занимаемой секторами 1 и 2; 4) части поверхности рулетки, занимаемой секторами 4 и 5; 5) части поверхности рулетки, занимаемой секторами 1 и 5?

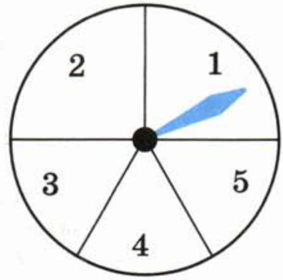


Рис. 34

366 Дано: $AB = 12$ см, $AM = 2$ см, $MN = 4$ см (рис. 35). На отрезке AB случайным образом отмечается точка X. Какова вероятность того, что точка X попадёт на отрезок: 1) AM; 2) AN; 3) MN; 4) MB; 5) AB?

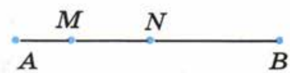


Рис. 35

367 Внутри квадрата со стороной 14 см выделен круг радиусом 2 см (рис. 36). Случайным образом внутри квадрата отмечается точка. Какова вероятность того, что она попадёт в выделенный круг?

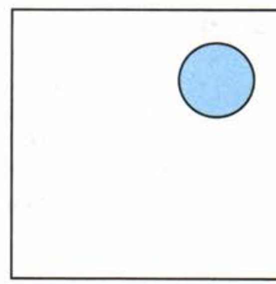


Рис. 36

§ 26 Относительная частота и закон больших чисел

Определение вероятности, сформулированное в § 23, называется *классическим определением вероятности*. Классическое определение не требует, чтобы испытание обязательно проводилось в действительности: теоретическим способом определяются все равновозможные и благоприятствующие событию исходы.

Такое определение предполагает, что число элементарных равновозможных исходов испытания конечно и выражается конкретным числом. Однако на практике — при изучении случайных явлений в естествознании, экономике, медицине, производстве — часто встречаются испытания, у которых число возможных исходов необозримо велико. А в ряде случаев до проведения реальных испытаний трудно или невозможно установить равновозможность исходов испытания. Например, до многократного подбрасывания кнопки (рис. 37) трудно представить, равновозможны ли её падения «на плоскость» и «на острие». Поэтому, наряду с классическим, на практике используют и так называемое *статистическое определение вероятности*. Для знакомства с ним требуется ввести понятие *относительной частоты*.

Рис. **37**

Относительной частотой события A в данной серии испытаний называют отношение числа испытаний M, в которых это событие произошло, к числу всех проведённых испытаний N. При этом число M называют *частотой* события A.

Относительную частоту события A обозначают $W(A)$. Тогда по определению:

$$W(A) = \frac{M}{N}. \qquad (1)$$

Задача 1 Во время тренировки в стрельбе по цели было сделано 30 выстрелов и зарегистрировано 26 попаданий. Какова относительная частота попадания по цели в данной серии выстрелов?

▶ Событие A — «попадание по цели» произошло в 26 случаях, т. е. $M = 26$. Общее число испытаний $N = 30$, поэтому

$$W(A) = \frac{26}{30} = \frac{13}{15}.$$

Ответ $\frac{13}{15}$. ◁

Исследование Два друга проводили испытания (опыты) с подбрасыванием монеты и наблюдали за появлением орла. Один из мальчиков подбрасывал монету и сообщал о том, что выпало — орёл (О) или решка (Р). Второй мальчик вносил результаты испытаний во второй столбец таблицы:

N	О или Р	M	$W = \frac{M}{N}$	N	О или Р	M	$W = \frac{M}{N}$
1	О	1	1	26	О	13	0,5
2	О	2	1	27	Р	13	0,4815
3	Р	2	0,6667	28	О	14	0,5
4	О	3	0,75	29	О	15	0,5172
5	Р	3	0,6	30	Р	15	0,5
6	О	4	0,6667	31	Р	15	0,4839
7	Р	4	0,5714	32	О	16	0,5
8	Р	4	0,5	33	Р	16	0,4848
9	О	5	0,5556	34	О	17	0,5
10	Р	5	0,5	35	О	18	0,5143
11	Р	5	0,4545	36	Р	18	0,5
12	Р	5	0,4167	37	О	19	0,5135
13	О	6	0,4615	38	О	20	0,5263
14	Р	6	0,4286	39	Р	20	0,5128
15	Р	6	0,4	40	О	21	0,525
16	О	7	0,4375	41	Р	21	0,5122
17	О	8	0,4706	42	Р	21	0,5
18	Р	8	0,4444	43	О	22	0,5116
19	О	9	0,4737	44	Р	22	0,5
20	Р	9	0,45	45	Р	22	0,4889
21	О	10	0,4762	46	О	23	0,5
22	Р	10	0,4545	47	Р	23	0,4894
23	О	11	0,4783	48	О	24	0,5
24	Р	11	0,4583	49	О	25	0,5102
25	О	12	0,48	50	Р	25	0,5

После пятидесяти подбрасываний в третьем столбце таблицы друзья записали результаты «накопления» частоты M появления орла, а в четвёр-

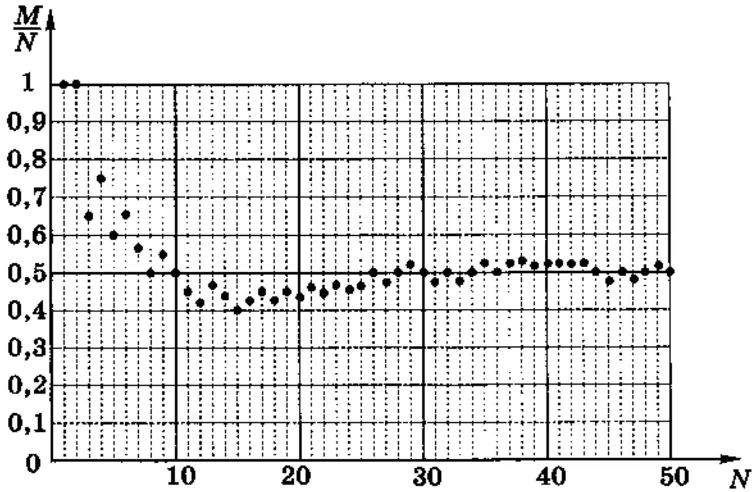


Рис. 38

том — подсчёт с помощью микрокалькулятора для каждого значения N (числа испытаний) относительной частоты $\frac{M}{N}$ (с точностью до одной десятитысячной).

После этой работы мальчики на рисунке 38 отметили точками результаты математической обработки проведённых испытаний. Один из друзей, глядя на рисунок, сказал, что он похож на график затухающих колебаний.

Придя в класс, друзья предложили всем 20 одноклассникам проделать аналогичные опыты с подбрасыванием монеты: каждый ученик бросал монету 50 раз и считал появление орла. После этого друзья составили сводную таблицу результатов испытаний (с. 135), суммируя в первом столбце число N проводимых учащимися испытаний, во втором — количество появлений орла M и находя в третьем столбце для каждой серии испытаний относительные частоты события W.

Друзья заметили, что после значительного числа испытаний относительная частота появления орла всё меньше отличается от 0,5, т. е. от величины вероятности этого события в классическом понимании.

Под *статистической вероятностью* понимают число, около которого колеблется относительная частота события при большом числе испытаний.

N	M	$W = \frac{M}{N}$	N	M	$W = \frac{M}{N}$
50	25	0,5	550	276	0,5018
100	48	0,48	600	302	0,5033
150	74	0,4933	650	328	0,5046
200	101	0,505	700	347	0,4957
250	126	0,504	750	372	0,496
300	145	0,4833	800	398	0,4975
350	169	0,4829	850	427	0,5024
400	196	0,49	900	448	0,4978
450	222	0,4933	950	477	0,5021
500	253	0,506	1000	502	0,502

Описанный в исследовании факт подтверждают и дошедшие до нас исторические сведения.

Известно, что в XVIII в. французский естествоиспытатель Жорж Луи Леклерк де Бюффон (1707—1788) провёл 4040 испытаний с подбрасыванием монеты. В результате чего наблюдал появление орла 2048 раз. Таким образом, Бюффон получил относительную частоту появления орла, равную $\frac{2048}{4040} \approx 0{,}5069$. В начале XX в. английский учёный Карл Пирсон (1857—1936) провёл с помощью своих учеников 24 000 аналогичных испытаний и наблюдал 12 012 появлений орла. Относительная частота события у Пирсона оказалась равной $\frac{12012}{24000} = 0{,}5005$.

Аналогичные исследования с большим числом испытаний проводились различными людьми в разные годы. В связи с этим и ему подобными явлениями швейцарский математик Якоб Бернулли (1654—1705) обосновал так называемый *закон больших чисел*:

Можно считать достоверным тот факт, что при большом числе испытаний относительная частота события $W(A)$ практически не отличается от его вероятности $P(A)$, т. е. $P(A) \approx W(A)$ при большом числе испытаний.

Задача 2 Родильный дом некоторого города вёл по годам подсчёт рождения мальчиков и девочек. Результаты заносились в таблицу.

Год	Число родившихся детей	
	Девочки	Мальчики
1998	802	823
1999	629	665
2000	714	769
2001	756	798
2002	783	811

Найти относительную частоту рождения мальчиков в рассматриваемые годы.

▶ Число родившихся мальчиков: $M = 823 + 665 + 769 + 798 + 811 = 3866$. Число родившихся девочек: $802 + 629 + 714 + 756 + 783 = 3684$. Общее число родившихся детей $N = 3866 + 3684 = 7550$. Относительная частота появления в рассматриваемом родильном доме мальчиков равна

$$W = \frac{M}{N} = \frac{3866}{7550} \approx 0{,}5121.$$

Ответ $W \approx 0{,}5121$. ◁

Отметим, что всемирные наблюдения за рождением детей показывают, что мальчиков на Земле рождается всегда чуть больше, чем девочек.

Упражнения

368 Заполнить последний столбец таблицы:

№ п/п	Испытание	Число испытаний (N)	Событие A	Частота события A (M)	Относительная частота события A $\left(W(A) = \frac{M}{N}\right)$
1	Бросается монета	100	Выпала решка	52	
2	Спортсмен стреляет по мишени	100	Попадание по мишени	90	
3	Бросается игральная кость	500	Выпало 5 очков	84	

369 Новый препарат давался 1000 пациентам, больным одной и той же болезнью. По истечении курса лечения 952 пациента исцелились. Какова относительная частота исцеления в рассмотренном исследовании?

370 В изготовленной партии из 10 000 болтов обнаружено 250 бракованных болтов. Найти относительную частоту появления в данной партии бракованного болта. Выразить результат в процентах.

371 Проводилась серия испытаний с подбрасыванием гайки (рис. 39). Результаты заносились в таблицу:

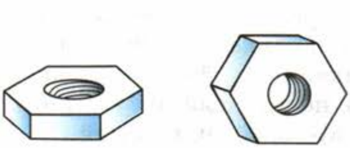
Число испытаний (N)	10	50	100	250	500	1000
Частота падения гайки плашмя (M)	7	33	67	155	316	627
Относительная частота падения гайки плашмя (W)						

Заполнить последнюю строку таблицы. Высказать предположение о значении вероятности P — падения гайки плашмя (с точностью до одной десятой).

372 Результаты испытаний с подбрасыванием напёрстка (рис. 40) заносились в таблицу:

Число испытаний (N)	100	200	500	1000
Частота падения на бок (M_1)	83	169	421	839
Частота падения на большой круг (M_2)	15	28	72	141
Относительная частота падения на бок (W_1)				
Относительная частота падения на большой круг (W_2)				

Заполнить две последние строки таблицы. Высказать предположение о значении вероятности падения напёрстка на бок (P_1) и на большой круг (P_2) с точностью до одной сотой.



Упала плашмя *Упала на грань*

Рис. 39

Упал на большой круг *Упал на бок* *Упал на малый круг*

Рис. 40

373 (**Исследование.**) Результаты подбрасывания 100 раз ($N = 100$) игрального кубика занести в таблицу.

Исходы испытания	1 очко	2 очка	3 очка	4 очка	5 очков	6 очков
Подсчёт случаев						
Частота (M)						
Относительная частота $\left(W = \frac{M}{100}\right)$						

Подсчёт случаев удобно проводить следующим образом: после каждого броска кубика в соответствующую выпавшему числу очков клетку таблицы ставится знак «|». После накопления четырёх вертикальных знаков пятый проводится горизонтально: «$\not{||||}$». После этого подсчёт частот существенно упрощается. Например, если в клетке подсчёта случаев стоят знаки «$\not{||||}$ $\not{||||}$ $\not{||||}$ ||», то, очевидно, под ней, в клетке частоты, следует записать число 17 (получаемое как $5 \cdot 3 + 2$). Объединив результаты исследований нескольких (k) учеников, составить сводную таблицу частот и относительных частот (для $N = 100k$ испытаний). Убедиться в том, что с увеличением числа испытаний относительная частота появления 1 очка, 2 очков, ..., 6 очков всё меньше отличается от вероятности каждого из этих событий $P = \frac{1}{6}$.

Упражнения к главе V

374 В коробке находятся 3 чёрных, 4 красных и 5 синих карандашей. Наугад вынимается один карандаш. Найти вероятность того, что вынутый карандаш: 1) чёрный; 2) красный; 3) синий; 4) не чёрный; 5) не красный; 6) не синий; 7) зелёный; 8) или чёрный, или красный, или синий.

375 Наугад называется натуральное число от 1 до 30. Какова вероятность того, что это число: 1) 6; 2) не 6; 3) кратно 6; 4) кратно 5; 5) простое число; 6) не меньше 27?

376 Витя забыл две последние цифры номера телефона приятеля и набрал их наугад. С какой вероятностью этот звонок попадёт к приятелю?

377 На стол бросают монету и игральный кубик. Какова вероятность того, что: 1) на монете появится орёл, а на кубике — 2 очка; 2) на монете появится решка, а на кубике — нечётное число очков?

378 Брошены две игральные кости — белая и чёрная. Какова вероятность того, что: 1) на белой кости выпало чётное число очков, а на чёрной — нечётное; 2) появятся 2 и 3 очка; 3) появятся два чётных числа очков; 4) появится чётное и нечётное число очков?

Проверь себя!

1 В коробке находятся 2 белых, 3 чёрных и 5 красных шаров. Наугад вынимается один шар. Найти вероятность того, что вынутый шар: 1) белый; 2) чёрный; 3) не красный; 4) или чёрный, или красный.

2 На стол бросают два игральных кубика. Какова вероятность того, что на первом кубике выпало 3 очка, а на втором — число очков, большее чем 4?

379 Из колоды карт (36 листов) наугад вынимается одна карта. Какова вероятность того, что эта карта: 1) валет; 2) король чёрной масти; 3) с чётным числом красной масти; 4) не с числом?

380 Брошены 3 монеты: копейка, пятак и гривенник. Какова вероятность того, что: 1) на копейке появится орёл, а на пятаке и гривеннике — решки; 2) на всех монетах выпадут решки?

381 В ящике находятся 3 белых и 2 чёрных шара. Наугад вынимаются 2 шара. Какова вероятность того, что вынуты: 1) 2 белых шара; 2) 2 чёрных шара; 3) чёрный и белый шары; 4) шары одного цвета?

382 Брошены две игральные кости. Какова вероятность того, что: 1) хотя бы на одной кости появятся 3 очка; 2) хотя бы на одной кости появится чётное число очков?

VI
глава

Случайные величины

§ 27 Таблицы распределения

Задача 1 Брошены две игральные кости. Игроки делают ставки на выпавшую сумму очков на двух костях. Есть ли сумма, на которую выгодно делать ставку?

▶ Подсчитаем вероятность появления каждой суммы. Общее число исходов n — появление всевозможных сумм на двух костях, согласно правилу произведения равно $6 \cdot 6 = 36$. Составим *таблицу сумм* очков:

1-я кость	2-я кость					
	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	**7**
2	3	4	5	6	**7**	8
3	4	5	6	**7**	8	9
4	5	6	**7**	8	9	10
5	6	**7**	8	9	10	11
6	**7**	8	9	10	11	12

С помощью таблицы для каждой конкретной суммы определим число благоприятствующих исходов m:

$$m_2 = m_{12} = 1,\ m_3 = m_{11} = 2,\ m_4 = m_{10} = 3,$$
$$m_5 = m_9 = 4,\ m_6 = m_8 = 5,\ m_7 = 6.$$

Вероятность появления той или иной суммы в результате бросания двух костей можно представить в виде следующей таблицы:

Сумма очков	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Вероятность $\left(P=\dfrac{m}{n}\right)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Наибольшую вероятность появления $\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$ имеет сумма очков, равная 7.

Ответ Такая сумма есть, она равна 7 очкам. ◁

В задаче появляющаяся при бросании костей сумма очков — *случайная величина*. Обозначим её X. Тогда $X_1 = 2$, $X_2 = 3$, ..., $X_{10} = 11$, $X_{11} = 12$ — значения случайной величины X. Соответствующие каждому значению X вероятности их появления P_1, P_2, ..., P_{10}, P_{11} указаны в таблице:

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{36}$

С помощью этой таблицы легко увидеть, например, какие значения величина X принимает с одинаковыми вероятностями; какое значение величины X появляется с большей вероятностью и т. д.

Существуют случайные величины, принимающие одинаковые значения, но с разными вероятностями. Рассмотрим, например, 3 игральных кубика, на гранях которых отмечены только одно или два очка: у кубика A одно очко встречается на гранях один раз, у кубика B — 2 раза, а у кубика C — 3 раза (рис. 41).

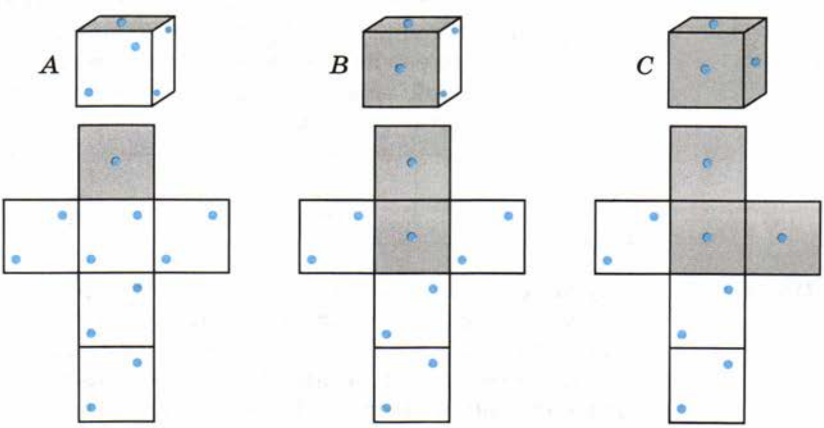


Рис. ***41***

Случайные величины X, Y и Z — числа очков, выпавшие после бросания на кубиках A, B и C соответственно, принимают одинаковые значения: $X_1 = Y_1 = Z_1 = 1$, $X_2 = Y_2 = Z_2 = 2$. Вероятности же появления этих чисел на каждом из рассмотренных кубиков различны (см. таблицы).

X	1	2
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6}$

кубик A

Y	1	2
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

кубик B

Z	1	2
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

кубик C

Эти таблицы называют *таблицами распределения значений случайной величины по их вероятностям*. Очевидно, что они составлены после *теоретического* расчёта вероятностей событий.

Рассмотрим примеры случайных величин, для которых невозможно записать распределение их значений по вероятностям, исходя только из теоретических соображений.

Пример 1 Падение некоторой кнопки «на острие» или «на плоскость» может быть рассмотрено как случайная величина R с условными значениями $R_1 = 0$ (падение «на острие») и $R_2 = 1$ (падение «на плоскость»).

В отличие от примеров с бросанием игральных кубиков, распределение значений величины R не может быть найдено теоретически. Поэтому записать его можно лишь после проведения серии опытов (см. § 26) с помощью относительной частоты. Для некоторой конкретной кнопки распределение значений случайной величины R по относительным частотам представлено с помощью таблицы:

R	0	1
W	0,55	0,45

Пример 2 Случайная величина X — оценка за контрольную работу учащихся IX класса — может принимать значения $X_1 = 1$, $X_2 = 2$, $X_3 = 3$, $X_4 = 4$, $X_5 = 5$. Распределение величины X по частотам (или относительным частотам) можно записать после подсчёта числа случаев появления каждого её значения.

Задача 2 После проверки контрольной работы в IX классе учитель сделал подсчёт числа случаев получения каждой из оценок и составил таблицу распределения значений величины X (оценка учащегося) по частотам M.

X	1	2	3	4	5
Подсчёт случаев	|	|||	~~||||~~ ~~||||~~ ~~||||~~	~~||||~~ ||||	|||
M	1	3	15	9	3

Составить таблицу распределения значений величины X по относительным частотам.

▶ Число учащихся IX класса N, писавших контрольную работу, равно сумме частот (M) всех выставленных оценок, т. е.

$$N = 1 + 3 + 15 + 9 + 3 = 31.$$

Зная, что относительная частота находится по формуле $W = \frac{M}{N}$, вычислим относительную частоту для каждого значения величины X:

$$W_1 = \frac{1}{31},\ W_2 = \frac{3}{31},\ W_3 = \frac{15}{31},\ W_4 = \frac{9}{31},\ W_5 = \frac{3}{31}.$$

Ответ

X	1	2	3	4	5
W	$\frac{1}{31}$	$\frac{3}{31}$	$\frac{15}{31}$	$\frac{9}{31}$	$\frac{3}{31}$

◁

Когда нужно находить сумму всех значений некоторой величины, используют знак $\sum$, введённый Л. Эйлером. Например, если частота M принимает значения M_1, M_2, ..., M_k, то будем использовать обозначение:

$$M_1 + M_2 + \ldots + M_k = \sum M.$$

Зная, что сумма всех частот случайной величины равна числу испытаний N, можно записать

$$\sum M = N.$$

Для любой случайной величины сумма относительных частот всех её значений равна 1.

● $$\sum W = \sum \left(\frac{M}{N}\right) = \frac{M_1}{N} + \frac{M_2}{N} + \ldots + \frac{M_k}{N} = \frac{M_1 + M_2 + \ldots + M_k}{N} = \frac{\sum M}{N} = \frac{N}{N} = 1.$$ ○

Например, в задаче 1:

$$\sum W = \frac{1}{31} + \frac{3}{31} + \frac{15}{31} + \frac{9}{31} + \frac{3}{31} = 1.$$

Задача 3 Рост каждой из 50 гимнасток одного спортивного клуба занесён в таблицу:

148	148	148	149	149	149	149	149	149	149
149	150	150	150	150	150	150	150	150	150
150	151	151	151	151	151	151	151	151	152
152	152	152	152	152	152	152	152	153	153
153	153	153	153	153	154	154	154	154	154

По имеющимся данным составить таблицу распределения значений случайной величины X — роста гимнасток клуба: 1) по частотам (M); 2) по относительным частотам (W).

▶ Величина X принимает значения $X_1 = 148$, $X_2 = 149$, ..., $X_7 = 154$. Подсчитывая число (M) гимнасток каждого роста, заносим данные в частотную таблицу, а затем для каждого значения X находим значение относительной частоты W, зная, что $N = 50$.

X	148	149	150	151	152	153	154
M	3	8	10	8	9	7	5
$W = \frac{M}{N}$	$\frac{3}{50}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{9}{50}$	$\frac{7}{50}$	$\frac{1}{10}$

Проверка:
$\sum M = 3 + 8 + 10 + 8 + 9 + 7 + 5 = 50 = N$;
$\sum W = 1$. ◁

Упражнения

383 Составить таблицу распределения по вероятностям P значений случайной величины X — числа очков, появившихся при бросании: 1) обыкновенного игрального кубика; 2) кубика, на двух гранях которого отмечено 1 очко, на двух гранях — 2 очка, на двух гранях — 3 очка; 3) кубика, на трёх гранях которого отмечено 1 очко, на двух — 2 очка, на одной грани — 3 очка; 4) кубика, на двух гранях которого отмечено 1 очко, на трёх — 2 очка, на одной — 3 очка.

384 На стол бросают две монеты. Исходу «орёл» припишем условное числовое значение 0, а исходу «решка» — 1. Составить таблицу распределения по вероятностям P значений случайной величины X — суммы выпавших на монетах чисел.

385 На стол одновременно бросают два игральных тетраэдра, грани каждого из которых пронумерованы числами 1, 2, 3 и 4. Составить таблицу распределения по вероятностям значений случайной величины X — суммы очков на гранях тетраэдров, касающихся поверхности стола.

386 На стол одновременно бросают игральный кубик и игральный тетраэдр (грани которого пронумерованы числами 1, 2, 3 и 4). Составить таблицу распределения по вероятностям значений случайной величины X — суммы очков, выпавших на кубике и на грани тетраэдра, касающейся поверхности стола.

387 Составить таблицу распределения по частотам M значений случайной величины X — цифр, встречающихся на ценниках товаров некоторого киоска:

73, 102, 225, 30, 44, 68, 76, 5, 90, 119,
86, 24, 37, 207, 8, 45, 51, 13, 201, 69.

388 В таблице записаны размеры обуви 20 девочек IX класса:

34	35	35	35	36	36	36	36	37	37
37	37	37	37	38	38	38	39	39	40

На основании этих данных составить таблицы распределения по частотам (M) и относительным частотам (W) значений случайной величины X — размеров обуви девочек IX класса.

389 В таблице приведены размеры одежды 50 учащихся IX класса:

50	40	44	44	46	46	44	48	46	44
38	44	48	50	40	42	50	46	54	44
42	42	52	44	46	38	46	42	44	48
46	48	44	40	52	44	48	50	46	46
48	40	46	42	44	50	46	44	46	48

На основании этих данных составить таблицы распределения по частотам и относительным частотам значений случайной величины X — размеров одежды учащихся IX класса.

390 Рассматривая произвольную страницу текста на русском языке из произведения русского писателя, составить таблицы распределения по частотам и по относительным частотам всех букв русского алфавита.

391 Используя результаты, полученные в упражнении **390**, и «шифр простой замены» (каждой букве русского алфавита соответствует своё двузначное число), расшифровать строки, принадлежащие А. С. Пушкину:

... 11 39 22 24 33 39, 35 11 21 38 31 30 28 11 30 29 38 33 17 36 22 37 23,
38 11 35 33 37 27 17 39 15 21 38 22 24 15 25 39 22 32 31, 24 35 22, 28 11 26 22 36 21 31 36 23, 38 11 35 33 37 33 27 23 32 31
33 37 33 21 37 33 27 36 15 37 33, 28 11 30 34 33 36 15 36 22 37 23 ...

§ 28 Полигоны частот

Распределение случайных величин можно задавать и демонстрировать графически.

Пусть случайная величина X — размер обуви мальчиков IX классов одной школы имеет распределение по частотам, представленное в таблице:

X	38	39	40	41	42	43	44	45
M	2	2	5	7	6	4	3	1

Отметим на координатной плоскости точки с координатами $(X_1; M_1)$, $(X_2; M_2)$, ..., $(X_8; M_8)$ и соединим их последовательно отрезками (рис. 42). Полученную ломаную линию называют *полигоном частот.*

Возможно графическое представление распределения случайной величины и по относительным частотам. Допустим, в фонде некоторой библиотеки имеются книги следующих направлений:

1. Художественная и детская литература.
2. Учебная и педагогическая литература.
3. Общественно-политическая литература.
4. Научно-техническая литература.
5. Энциклопедии и словари.

Распределение величины X — числа книг того или иного направления по относительным частотам

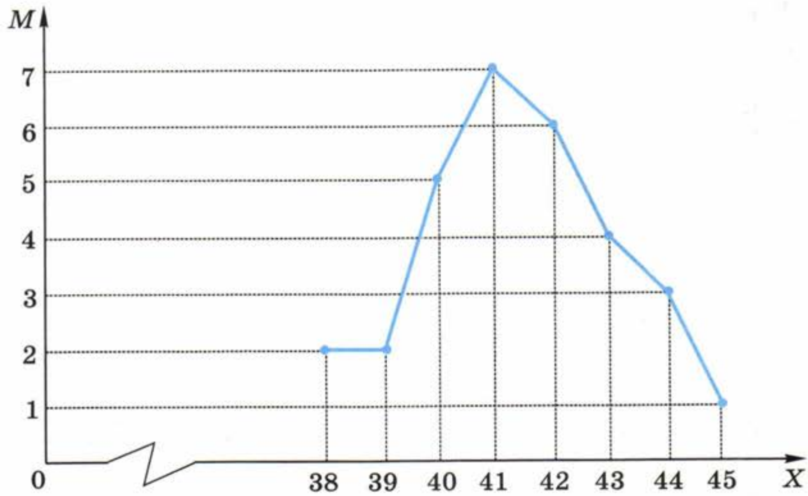


Рис. 42

представлено в таблице, где 1, 2, 3, 4 и 5 — условные значения случайной величины X (соответствующие её порядковому номеру в списке наименований направлений).

X	1	2	3	4	5
W	0,55	0,21	0,1	0,08	0,06

$\Sigma W = 1$

Распределение величины X можно наглядно представить в виде *полигона относительных частот* (рис. 43), в виде линейной диаграммы (рис. 44) или

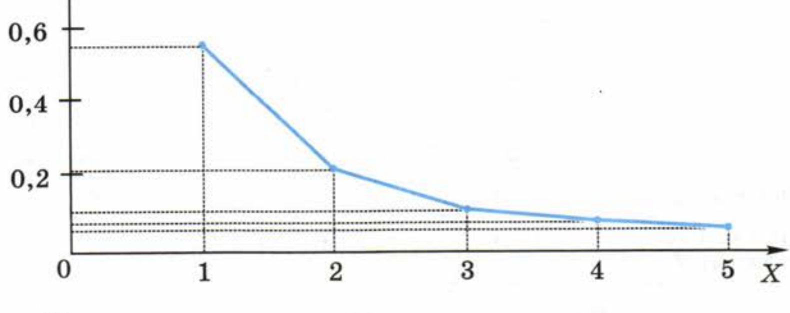


Рис. 43

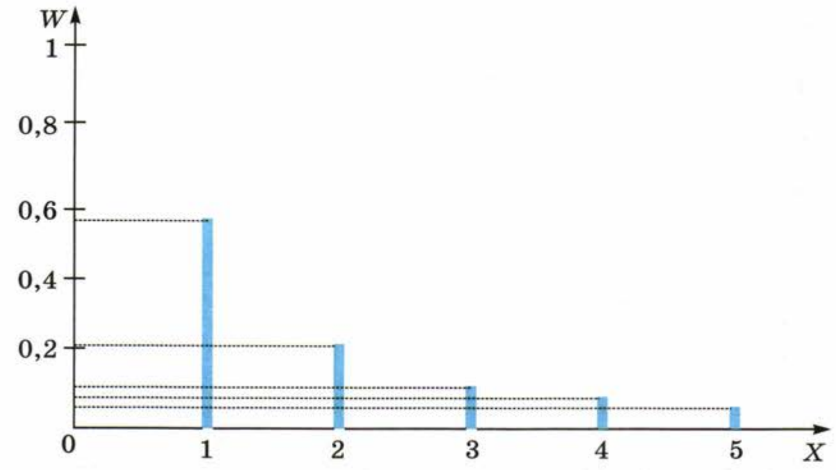


Рис. ***44***

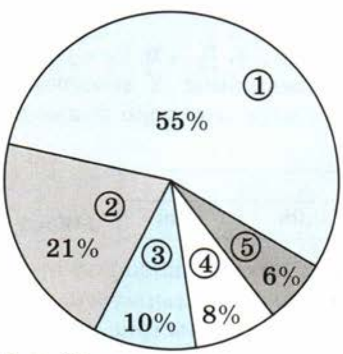


Рис. ***45***

в виде круговой диаграммы, предварительно переведя значения относительной частоты в проценты (рис. 45). Если случайная величина принимает много различных значений, то их распределение можно представить после *разбиения на классы* всех её значений. Количество классов может быть любым, удобным для рассмотрения (обычно их выбирают в количестве от 4 до 12). При этом величины (объёмы) классов должны быть одинаковыми.

Рассмотрим п р и м е р.

В таблице представлены сведения о заработной плате 100 рабочих одного предприятия. При этом заработные платы (округлённые до целого числа рублей) сгруппированы в 7 классов, каждый объёмом в 1000 р.

Классы	От 8001 до 9000	От 9001 до 10 000	От 10 001 до 11 000	От 11 001 до 12 000	От 12 001 до 13 000	От 13 001 до 14 000	От 14 001 до 15 000
Номер класса X	1	2	3	4	5	6	7
Частота (количество рабочих) M	4	6	18	36	22	10	4

Проверка: $\sum M = 100$.

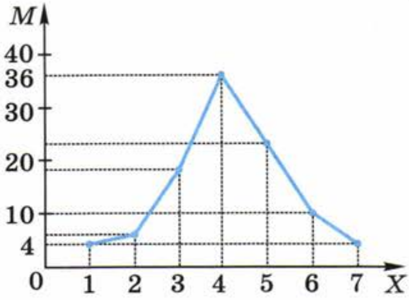


Рис. 46

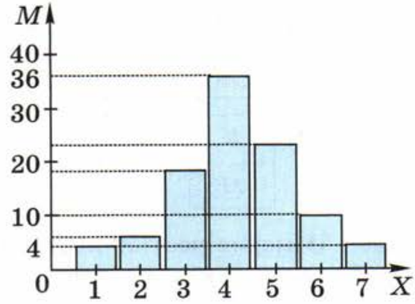


Рис. 47

Наглядно частотное распределение зарплат по классам можно представить с помощью полигона частот (рис. 46) или столбчатой диаграммы (рис. 47).

Упражнения

392 На основании данных таблицы представить в виде столбчатой и круговой диаграмм распределение значений случайной величины X:

1)

X	1	2	3	4
W	0,1	0,3	0,4	0,2

2)

X	1	2	3	4	5
W	0,3	0,3	0,2	0,1	0,1

393 На основании данных частотной таблицы построить таблицу распределения значений величины X по относительным частотам:

1)

X	1	2	3	4	5
M	2	3	5	8	12

2)

X	1	2	3	4	5	6
W	2	5	15	20	5	3

Построить столбчатую и круговую диаграммы относительных частот распределения значений величины X.

394 Построить полигон частот и полигон относительных частот значений случайной величины X, распределение которой представлено в таблице:

1)

X	11	12	13	14	15
M	3	1	5	6	5

2)

X	23	24	25	26	27	28
M	6	5	2	3	1	3

395 Измерив рост 50 девятиклассников в сантиметрах, результаты записали в таблицу:

149	150	150	151	151	152	152	153	154	154
155	155	155	156	156	157	157	157	158	158
159	159	159	159	161	161	161	162	162	162
162	162	165	166	166	166	167	167	169	170
171	171	173	173	173	175	176	178	180	182

Сгруппировав данные по классам 145—149, 150—154, ..., 180—184, представить частотное распределение роста учащихся по этим классам с помощью: 1) таблицы; 2) полигона частот; 3) столбчатой диаграммы.

396 При переписи населения данные о возрасте (полном количестве прожитых лет) жильцов некоторого дома оказались следующими:
34, 31, 2, 8, 48, 40, 20, 15, 12, 21, 20, 0, 68, 39, 35, 16; 13, 9, 4, 72, 74, 75, 45, 44, 23, 18, 88, 60, 54, 30, 32, 11, 10, 5, 57, 53, 56, 24, 2, 1, 60, 59, 34, 30, 9, 7, 43, 42, 19, 1, 36, 37, 14, 13, 9, 62, 58, 19, 39, 35, 12, 8, 40, 25, 3, 33, 34, 8, 7, 4, 28, 0, 41, 29, 21, 1, 31, 27, 6, 3, 70, 56, 67, 25, 24, 2.
Разбить приведённые выше данные по классам. Представить распределение данных по классам в виде полигона частот.

§ 29 Генеральная совокупность и выборка

В реальной жизни *схожие элементы некоторой совокупности сравнивают по различным признакам.* Как мы уже видели в задачах предыдущих параграфов, учащихся IX классов можно сравнивать, например, по росту, размеру одежды, успеваемости и т. д. Болты можно сравнивать по длине, диаметру, весу, материалу и т. д. Практически любой признак либо поддаётся непосредственному измерению, либо может получить условную числовую характеристику (см. пример с книгами в § 28). Таким образом, некоторый признак элементов совокупности можно рассматривать как случайную величину, принимающую те или иные числовые значения.

При изучении реальных явлений часто бывает невозможно обследовать все элементы совокупности. Например, практически невозможно выявить размеры обуви у всех людей планеты. А проверить, например, наличие листов некачественной фотобумаги в большой партии хотя и реально, но бессмысленно, так как полная проверка приведёт к уничтожению всей партии бумаги.

В подобных случаях вместо изучения всех элементов совокупности, которую называют *генеральной совокупностью*, обследуют её значительную часть, выбранную случайным образом. Эту часть называют *выборкой*.

Если в выборке присутствуют все значения случайной величины примерно в тех же пропорциях, что и в генеральной совокупности, то эту выборку называют *репрезентативной* (от фр. *représentatif* — представительный).

Например, если менеджер швейной фабрики большого города хочет выяснить, в каком количестве нужно шить одежду тех или иных размеров, он должен составить репрезентативную выборку людей этого города. *Объём* её может быть и не очень большим, но в качестве такой выборки нельзя, например, брать только детей детского сада или только рабочих одного завода. Очевидно, микромоделью города могут послужить жильцы многоквартирного дома (или нескольких домов), в котором примерно в тех же пропорциях, что и в самом городе, проживают люди разных возрастов и разных комплекций.

Пусть S — объём генеральной совокупности, N — объём репрезентативной выборки, в которой значения исследуемого признака распределены по частотам M_1, M_2, ..., M_k, где $\sum M = N$. Требуется в генеральной совокупности найти частоты $S_1, S_2, \ldots, S_k$ тех же значений признака, что и в выборке $\left(\sum S = \overline{\overline{S}} \right)$.

Для идеально составленной репрезентативной выборки

$$\frac{M_i}{N} = W_i = \frac{S_i}{\overline{\overline{S}}}, \qquad (1)$$

где i — порядковый номер значения признака ($1 \leqslant i \leqslant k$). Из соотношений (1) находим $S_i = \overline{\overline{S}} \frac{M_i}{N}$ или

$$S_i = \overline{\overline{S}} W_i, \text{ где } 1 \leqslant i \leqslant k. \qquad (2)$$

Задача 1 Фабрика резиновых изделий выиграла тендер на изготовление $\overline{\overline{S}} = 10\ 000$ армейских противогазов. Для определения того, сколько противогазов каждого из пяти существующих размеров следует изготовить, были сделаны замеры у $N = 100$ случайным образом выбранных солдат ближайшей воинской части. Распределение размеров противогазов X по частотам M оказалось следующим:

X	0	1	2	3	4
M	5	21	47	22	5

Сколько противогазов каждого размера будет изготавливать фабрика?

▶ Будем считать исследуемую выборку объёмом $N = 100$ солдат репрезентативной. Тогда в генеральной совокупности (объёмом $\overline{\overline{S}} = 10\ 000$ солдат) количество противогазов каждого размера пропорционально количеству противогазов соответствующего размера в выборке и для каждого размера находится по формуле (2). Результаты расчётов будем записывать в таблицу:

Размер (X)	0	1	2	3	4	
Частота в выборке (M)	5	21	47	22	5	$\Sigma M = N = 100$
Относительная частота	0,05	0,21	0,47	0,22	0,05	$\Sigma W = 1$
Количество противогазов ($\overline{\overline{S}} \cdot W$)	500	2100	4700	2200	500	$\Sigma (\overline{\overline{S}} \cdot W) = \overline{\overline{S}} = 10\ 000$

Ответ

Размер	0	1	2	3	4
Количество противогазов	500	2100	4700	2200	500

◁

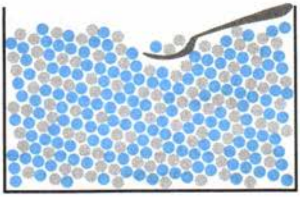


Рис. 48

В промышленности и сельском хозяйстве для определения количественного соотношения изделий разного сорта пользуются так называемым *выборочным методом*. Суть этого метода будет ясна из описания следующего опыта.

В коробке тщательно перемешан горох двух сортов: зелёный и жёлтый. Небольшой ёмкостью, например ложкой (рис. 48), извлекают из разных мест коробки небольшие порции гороха. В каждой порции подсчитывают число жёлтых (M) и число всех (N) горошин. Для каждой порции находят относительную частоту появления жёлтой горошины $W = \frac{M}{N}$. Так поступают k раз (на практике обычно берут $5 \leqslant k \leqslant 10$) и каждый раз вычисляют относительную частоту. За статистическую вероятность изъятия жёлтой горошины из коробки принимают среднее арифметическое полученных относительных частот $W_1, W_2, \ldots, W_k$:

$$W_{\text{ср}} = \frac{W_1 + W_2 + \ldots + W_k}{k}.$$

Упражнения

397 Определить, какую из предложенных выборок в последнем столбце таблицы можно считать репрезентативной.

Номер задания	Генеральная совокупность	Цель обследования	Выборка
1	Партия одинаковых деталей объёмом 10 000 штук	Определение числа бракованных деталей в партии	1) 5 рядом лежащих деталей; 2) 5 деталей, выбранных случайным образом из разных частей партии; 3) 100 деталей, выбранных случайным образом из разных частей партии
2	Партия штампованных деталей объёмом 100 000 штук	Определение среднего веса детали в партии	1) 2 детали; 2) 100 деталей, отштампованных последними; 3) 50 случайным образом выбранных деталей из партии

Продолжение

Номер задания	Генеральная совокупность	Цель обследования	Выборка
3	Урожай зерна с поля площадью 1000 га	Определение урожайности зерна на этом поле	1) Урожай зерна с северного склона холма площадью 1 га; 2) среднее арифметическое урожайности с двух соседних участков площадью 1 га: северного и восточного склонов холма; 3) среднее арифметическое урожайностей с 10 участков, каждый из которых площадью 10 соток выбран на поле случайным образом

398 Рассмотреть в качестве генеральной совокупности всё население большого города. В таблице указана цель статистического обследования населения и то, каким образом составлялась выборка из генеральной совокупности. Попытаться объяснить, почему составленную выборку нельзя считать репрезентативной.

Номер задания	Цель обследования	Выборка
1	Выявление читательских интересов	1) Дети старшей группы детского сада; 2) студенты исторического факультета университета
2	Выявление любимых мелодий (песен)	1) 100 учащихся музыкальной школы; 2) 100 человек, случайным образом остановленных и опрошенных поздно вечером на улице города
3	Определение числа больных гриппом в городе во время пика эпидемии	1) 100 случайным образом выбранных пациентов терапевтических кабинетов поликлиник города; 2) жильцы одного подъезда двухэтажного дома
4	Определение среднего уровня доходов населения	1) 300 случайным образом выбранных жильцов студенческого общежития; 2) все жители коттеджного района города
5	Определение наиболее ходовых размеров джинсов	1) Все студенты хореографического училища; 2) члены секции сумо

Продолжение

Номер задания	Цель обследования	Выборка
6	Определение количества домашних кошек и собак, приходящегося на душу населения в городе	1) Жильцы пяти частных домов; 2) жильцы многоквартирного дома

399 Относительная частота появления имён существительных в тексте некоторого автора близка к 0,4. Сколько (приблизительно) имён существительных встретится в случайным образом выбранном отрывке из текста этого же автора, если всего в этом отрывке 500 слов?

400 В отрывке из художественного произведения объёмом 600 слов некоторого автора глаголы встречаются 72 раза. Определить примерное количество глаголов в отрывке объёмом 2000 слов из текста того же автора.

401 Обувной цех должен выпустить 1000 пар кроссовок молодёжного фасона. С этой целью были выявлены размеры обуви у 50 случайным образом выбранных подростков. Распределение выявленных размеров по частотам представлено в таблице:

Размер (X)	35	36	37	38	39	40	41	42
Частота (M)	3	5	6	12	11	7	4	2

Считая рассмотренную выборку репрезентативной, определить, сколько пар кроссовок каждого размера выпустит обувной цех.

402 Среди случайным образом выбранных 100 молодых людей, носящих летом кепки, провели опрос о цветовых предпочтениях этого вида головных уборов. Результаты опроса отражены в таблице:

Цвет	Чёрный	Красный	Синий	Серый	Белый	Жёлтый	Зелёный
Частота	32	20	16	14	11	5	2

Считая рассмотренную выборку репрезентативной, высказать рекомендации швейной фабрике по количеству выпускаемых кепок каждого цвета, если фабрика должна подготовить к продаже 30 000 кепок.

§ 30

Размах и центральные тенденции

1. Размах, мода и медиана

Генеральные совокупности и выборки случайных величин иногда приходится характеризовать одним числом. На практике это бывает необходимо, например, для быстрого сравнения двух или нескольких совокупностей по общему признаку.

Рассмотрим конкретный пример.

Имеются: 1) распределение случайной величины X — числа прочитанных за каникулы книг десятью девочками по частотам M (таблица слева); 2) распределение по частотам случайной величины Y — числа прочитанных за каникулы книг девятью мальчиками того же класса (таблица справа).

X	3	4	5	8	12
M	3	2	3	1	1

$N = \Sigma M = 10$

Y	3	4	5	6	7
M	2	4	1	1	1

$N = \Sigma M = 9$

Нужно сравнить *интерес к чтению* девочек и мальчиков этого класса. Когда в совокупности число элементов N небольшое, все значения, которые они принимают, можно для наглядности выписать в виде упорядоченного ряда чисел — последовательности значений случайной величины в порядке их возрастания. При этом каждое значение выписывается столько раз, какова его частота в совокупности. Например, заданные таблицами распределения величин X и Y могут быть записаны соответственно в виде следующих рядов:

$$3,\ 3,\ 3,\ 4,\ 4,\ 5,\ 5,\ 5,\ 8,\ 12; \qquad (1)$$
$$3,\ 3,\ 4,\ 4,\ 4,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7. \qquad (2)$$

Для сравнения предложенных совокупностей могут быть использованы различные характеристики. Перечислим некоторые из них.

Размах (обозначается R) — разница между наибольшим и наименьшим значениями случайной величины.

Так, для совокупности (1) $R = 12 - 3 = 9$, а для совокупности (2) $R = 7 - 3 = 4$. Можно сказать, что разброс в количестве прочитанных книг у девочек больше, чем у мальчиков. Кроме того, вторая совокупность более однородная (равномерная), чем первая.

Мода (обозначим Mo) — наиболее часто встречающееся значение случайной величины.

Так, в совокупности (1) две моды: $Mo_1 = 3$ и $Mo_2 = 5$ (значения 3 и 5 имеют одинаковые частоты $M = 3$). В совокупности (2) $Mo = 4$, так как значение 4 в совокупности (2) встречается чаще других (рис. 49).

Медиана (обозначим Me) — это так называемое серединное значение упорядоченного ряда значений случайной величины.

В ряду (1) число членов десять ($N = 10$) — чётное число. Для него медиана равна среднему арифметическому двух центральных значений: пятого $\left(\frac{N}{2} = \frac{10}{2} = 5\right)$, оно равно 4, и шестого $\left(\frac{N}{2} + 1 = 6\right)$, оно равно 5, т. е.

$$Me = \frac{4+5}{2} = 4,5.$$

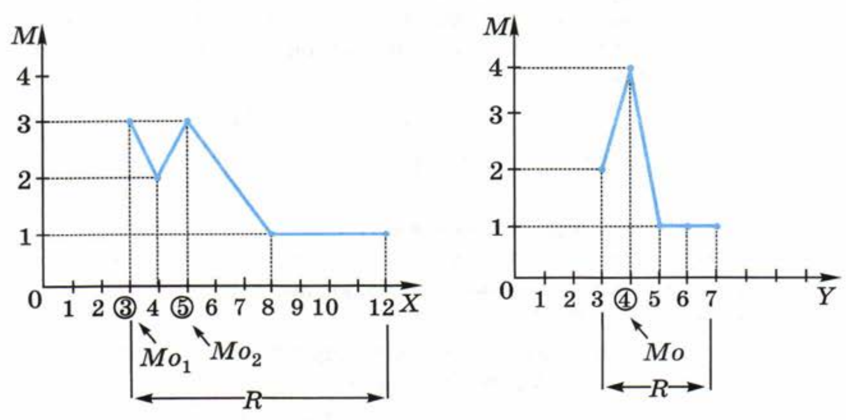


Рис. 49

В ряду (2) нечётное число элементов ($N = 9$). Его медиана равна значению центрального пятого $\left(\frac{N+1}{2} = \frac{9+1}{2} = 5\right)$ члена ряда:

$$Me = 4.$$

Можно сказать, что медиана делит упорядоченный ряд чисел на две равные по количеству элементов части:

$$\begin{array}{c} 4{,}5 \\ 3\ \ 3\ \ 3\ \ 4\ \ 4\ \ \uparrow\ \ 5\ \ 5\ \ 5\ \ 8\ \ 12 \\ \text{медиана} \\ \downarrow \\ 3\ \ 3\ \ 4\ \ 4\ \ 4\ \ 4\ \ 5\ \ 6\ \ 7 \end{array}$$

О совокупности девочек (1) можно сказать, что одна половина из них прочитала меньше 4,5 книг, а другая половина — больше 4,5 книг. В совокупности (2) одна половина мальчиков прочитала не больше 4 книг, а другая половина — не меньше 4 книг.

Задача 1 Найти размах, моду и медиану следующей совокупности значений случайной величины:

$$-2,\ 3,\ 4,\ -3,\ 0,\ 1,\ 3,\ -2,\ -1,\ 2,\ -2,\ 1.$$

▶ Запишем предложенные значения в виде упорядоченного ряда чисел:

$$-3,\ -2,\ -2,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 3,\ 4.$$

Размах $R = 4 - (-3) = 7$, мода $Mo = -2$. Так как число элементов $N = 12$ — число чётное, то медиана равна среднему арифметическому значений шестого и седьмого членов упорядоченного ряда чисел:

$$Me = \frac{0+1}{2} = 0{,}5.$$

Ответ $R = 7$, $Mo = -2$, $Me = 0{,}5$. ◁

2. Среднее значение

Средним значением случайной величины X (обозначается $\overline{X}$) называют среднее арифметическое всех её значений.

Если все значения случайной величины X_1, X_2, ..., X_N различны, то

$$\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_N}{N}. \qquad (3)$$

Если значения случайной величины $X_1, X_2, \ldots, X_k$ имеют в совокупности соответственно частоты M_1, $M_2, \ldots, M_k$, то

$$\overline{X} = \frac{X_1M_1 + X_2M_2 + \ldots + X_kM_k}{M_1 + M_2 + \ldots + M_k}. \quad (4)$$

Зная, что $\Sigma M = N$, формулу (4) можно переписать в виде

$$\overline{X} = \frac{X_1M_1 + X_2M_2 + \ldots + X_kM_k}{N}. \quad (4')$$

Возвращаясь к примеру с изучением интереса к чтению у девочек и мальчиков класса, найдём по формуле (4) среднее значение предложенных совокупностей:

$$\overline{X}_{\text{д}} = \frac{3\cdot3 + 4\cdot2 + 5\cdot3 + 8\cdot1 + 12\cdot1}{3+2+3+1+1} = \frac{52}{10} = 5{,}2,$$

$$\overline{X}_{\text{м}} = \frac{3\cdot2 + 4\cdot4 + 5\cdot1 + 6\cdot1 + 7\cdot1}{2+4+1+1+1} = \frac{40}{9} \approx 4{,}4.$$

Так как $\overline{X}_{\text{д}} > \overline{X}_{\text{м}}$, можно говорить, что за один и тот же промежуток времени девочки класса в среднем читают больше книг, чем мальчики.

Задача 2 На соревнованиях по фигурному катанию 2 фигуристки получили (по шестибалльной шкале) оценки судей, представленные в таблице:

Номер фигуристки	Номер судьи								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	4,8	5,6	4,9	5,2	4,7	4,9	4,9	4,8	4,7
2	5,1	4,2	5,0	4,9	5,0	5,1	5,0	5,1	5,0

Которая из фигуристок выступила лучше?

▶ Запишем в таблицы распределение по частотам оценок X и Y, выставленных соответственно первой и второй фигуристкам:

X	4,7	4,8	4,9	5,2	5,6
M	2	2	3	1	1

$\Sigma M = N = 9$

Y	4,2	4,9	5,0	5,1
M	1	1	4	3

$\Sigma M = N = 9$

Найдём среднее значение оценок каждой из фигуристок:

$$\overline{X} = \frac{4{,}7\cdot2 + 4{,}8\cdot2 + 4{,}9\cdot3 + 5{,}2\cdot1 + 5{,}6\cdot1}{9} = \frac{44{,}5}{9} \approx 4{,}94,$$

$$\overline{Y} = \frac{4{,}2\cdot1 + 4{,}9\cdot1 + 5{,}0\cdot4 + 5{,}1\cdot3}{9} = \frac{44{,}4}{9} \approx 4{,}93.$$

Получаем $\overline{X} > \overline{Y}$, хотя очевидно, что у второй фигуристки почти все оценки больше 5,0, а у первой — меньше 5,0. При этом сравнение в пользу второй фигуристки выглядит несправедливым. Такой результат получен, скорее всего, из-за необъективности 2-го судьи, завысившего по сравнению с остальными судьями оценку первой фигуристке и занизившего оценку второй фигуристке.

Для большей объективности сравнения результатов на соревнованиях из совокупности баллов каждого фигуриста отбрасывают наибольшее и наименьшее значения.

После отбрасывания наибольшего и наименьшего значений из совокупности баллов каждой фигуристки имеем:

$$\overline{X}' = \frac{4{,}7 \cdot 1 + 4{,}8 \cdot 2 + 4{,}9 \cdot 3 + 5{,}2 \cdot 1}{7} = \frac{34{,}2}{7} \approx 4{,}89,$$

$$\overline{Y}' = \frac{4{,}9 \cdot 1 + 5{,}0 \cdot 4 + 5{,}1 \cdot 2}{7} = \frac{35{,}1}{7} \approx 5{,}01.$$

Так как $\overline{X}' < \overline{Y}'$, считаем, что вторая фигуристка выступила лучше первой. ◁

В книгах по статистике моду, медиану и среднее объединяют одним термином — *меры центральной тенденции* (или, короче, *центральные тенденции*), подчёркивая тем самым возможность измерить, охарактеризовать совокупность одним числом, к которому стремятся все её значения.

Не для каждой совокупности имеет смысл формально находить центральные тенденции. Например, если исследуется совокупность

$$120,\ 120,\ 180,\ 11\,500 \qquad (5)$$

годовых доходов четырёх семей (в тыс. р.), то очевидно, что ни мода (120), ни медиана (150), ни среднее (2980) не могут выступать в роли объективной характеристики всех значений. Это объясняется тем, что размах совокупности (11 380) соизмерим с наибольшим её значением.

В данном случае можно было искать центральные тенденции, например, части совокупности (5):

$$120,\ 120,\ 180,$$

условно назвав её выборкой годовых доходов малообеспеченной части населения.

Если в выборке *среднее* значение существенно отличается от *моды*, то его неразумно выбирать в качестве типичного представителя совокупности данных.

Упражнения

403 Найти размах, моду и медиану совокупности значений случайной величины X:
1) 1, 1, 2, 2, 2, 3, 5, 5, 6, 6, 6, 9;
2) –4, –2, –2, –1, 0, 2, 2, 2, 2, 5, 7.
Построить полигон частот значений величины X. Указать размах и моду совокупности.

404 Найти размах, моду и медиану совокупности значений величины X:

1)

X	2	3	4	5
M	3	4	1	3

2)

X	–1	2	3	5	6
M	2	3	4	4	1

Построить полигон частот значений величины X. Указать на нём размах, моду и медиану совокупности.

405 Найти размах, моду и медиану выборки:
1) 1, 3, –2, 4, –2, 0, 2, 3, 1, –2, 4;
2) 0,2; 0,4; 0,1; 0,5; 0,1; 0,2; 0,3; 0,5; 0,4; 0,6.

406 Найти среднее значение выборки:
1) 3, 4, 1, 2, 5;
2) 2, –5, 4, –3, –2, 1;
3) –2, –2, 3, 3, 3, 5, 5;
4) 4, 4, 4, 5, 5, 6, 6, 6.

407 Найти среднее значение случайной величины X:

1)

X	–1	2	3	5
M	3	4	5	2

2)

X	0	1	3	5	6
M	4	5	6	3	2

408 Построить полигон частот значений случайной величины X из упражнения **407** и указать на нём среднее значение совокупности.

409 При определении различными способами плотности материала, из которого изготовлена деталь, были получены следующие данные:
6,98 г/см^3, 7,04 г/см^3, 7,01 г/см^3, 6,97 г/см^3, 7,00 г/см^3.
Найти среднее арифметическое этой совокупности. Высказать предположение о материале, из которого изготовлена деталь.

410 Педагогический стаж восьми учителей школы, работающих в старших классах одной школы, следующий:
5 лет, 8 лет, 15 лет, 12 лет, 17 лет, 14 лет, 18 лет, 9 лет.
Найти среднее и медиану этой выборки.

411 Девочки IX класса на уроке физкультуры при прыжках взяли высоты, величины которых (в см) учитель записал в журнал:

90, 125, 125, 130, 130, 135, 135, 135, 140, 140, 140.

Какая высота прыжка наилучшим образом характеризует спортивную подготовку девушек класса?

412 В таблице приведены данные о рабочем стаже (в годах) сотрудников лаборатории. Найти среднее, моду и медиану рассматриваемой совокупности.

Стаж работы	1	2	4	5	7	10	11	12	16	19	20	21	22	25
Число сотрудников	2	1	4	3	4	2	3	1	2	5	3	1	1	2

Упражнения к главе VI

413 На стол бросают два игральных октаэдра (рис. 50), грани каждого из которых занумерованы числами от 1 до 8. Составить таблицу распределения по вероятностям значений случайной величины X — суммы очков на верхних гранях октаэдров.

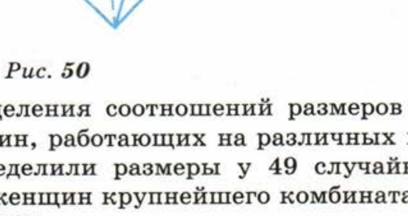


Рис. ***50***

414 Для определения соотношений размеров рабочих халатов для женщин, работающих на различных предприятиях города, определили размеры у 49 случайным образом выбранных женщин крупнейшего комбината и составили таблицу (с. 163).

48	48	50	54	48	48	54
50	46	50	50	50	48	52
52	48	48	52	54	46	58
46	52	56	50	52	50	50
52	50	48	50	50	44	52
48	42	54	46	56	56	48
44	48	46	48	54	54	46

1) Сколько халатов каждого размера следует сшить, если планируется шить по одному халату для каждой из работающих в производстве города 73 500 женщин? 2) На основании данных таблицы построить полигон частот размеров женской одежды. 3) Найти моду, медиану, среднее и размах выборки.

Проверь себя!

1 Составить таблицы распределения по частотам (M) и относительным частотам (W) значений случайной величины X — оценок за контрольную работу учащихся одного класса:
2, 5, 4, 4, 3, 4, 3, 3, 4, 4, 2, 3, 4, 3, 3, 4, 5, 3, 2, 4.
Построить полигон частот значений величины X.

2 Найти размах, среднее, моду и медиану выборки значений случайной величины Y:
–1, 3, 0, 5, 8, 6, 3, 7, –2, 1.

415 Для каждой из трёх совокупностей, представленных таблицами распределения, найти среднее, моду, медиану и размах.

X	1	2	4	6
M	2	1	3	2

Y	–2	0	1	2	3
M	2	3	2	2	1

Z	–5	–4	–2	3
M	1	3	3	1

416 На основании данных таблиц распределения (упражнение **415**) построить полигоны относительных частот значений случайных величин X, Y, Z.

VII
глава

Множества. Логика

§ 31 Множества

1. Множество и его элементы. Подмножества

Понятие *множества* в математике относится к неопределяемым понятиям (подобно, например, понятиям числа и точки). Приведём примеры множеств: 1) множество жителей города; 2) множество точек плоскости; 3) множество натуральных чисел и т. д.

Предметы или понятия, из которых состоит множество, называют его *элементами*. Например, число 6 — элемент множества натуральных чисел.

Элементы множества часто обозначают строчными (малыми) буквами, а сами множества — прописными (заглавными) буквами латинского алфавита.

Тот факт, что элемент x является элементом множества A записывают так: $x \in A$ (читается «x принадлежит A», или «элемент x принадлежит множеству A», или «x содержится в A»). Запись $x \notin A$ означает, что элемент x не принадлежит множеству A.

Например: $42 \in \boldsymbol{N}$, $\frac{2}{3} \notin \boldsymbol{N}$, где $\boldsymbol{N}$ — множество натуральных чисел.

Считается, что множество задано, если перечислены все его элементы или названо *характеристическое* свойство, по которому можно судить, принадлежит или не принадлежит данный элемент рассматриваемому множеству.

Перечисляемые элементы множества принято записывать в фигурных скобках. Например, $\{1; 2; 3; 4; 5\}$ — множество, состоящее из первых пяти натуральных чисел. Это же множество (обозначим его M) можно записать, сформулировав его характеристическое свойство, например, следующим образом:

$$M = \{x:\ x \in \boldsymbol{N},\ 1 \leqslant x \leqslant 5\}. \qquad (1)$$

В этой записи зафиксировано, что множество M состоит из элементов x, обладающих перечисленными после двоеточия свойствами (двоеточие заменяет слова «таких, что»). Запись (1) читается так: «Множество состоит из элементов x, таких, что каждый из них является натуральным числом и удовлетворяет неравенствам $1 \leqslant x \leqslant 5$».

Задача 1 Перечислить элементы множества

$$A = \{x:\ x \in \boldsymbol{N},\ 2x^2 - 7x + 3 = 0\}.$$

▶ Решение сводится к перечислению натуральных корней уравнения $2x^2 - 7x + 3 = 0$. Корни этого уравнения $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = 3$, из которых только $x_2 \in \boldsymbol{N}$.

Ответ $\{3\}$. ◁

Если бы в задаче 1 было задано уравнение, не имеющее натуральных корней, то в ответе следовало бы указать, что A — пустое множество (не содержит ни одного элемента). Пустое множество обозначается знаком $\varnothing$.

Множества, состоящие из одних и тех же элементов, называют *равными*. Если множества A и B равны, то записывают $A = B$. Например, если

$$A = \{2; 0; 3\},\ B = \{3; 2; 0\},\ \text{то}\ A = B.$$

Если каждый элемент множества B является элементом множества A, то множество B называют *подмножеством* (частью) множества A и записывают $B \subset A$ или $A \supset B$. Такая запись читается как «(множество) B содержится в (множестве) A» или «A содержит B». Например, подмножествами множества $\{a, b, c\}$ являются следующие восемь множеств:

$$\{a\},\ \{b\},\ \{c\},\ \{a, b\},\ \{a, c\},\ \{b, c\}\ \{a, b, c\},\ \varnothing.$$

Отметим, что любое множество является своим подмножеством, а пустое множество считают подмножеством любого множества.

2. Разность множеств. Дополнение до множества

Пусть имеются два множества A и B. Эти множества на рисунке 51 условно изображены частями плоскости, находящимися внутри замкнутых линий и называемыми *кругами Эйлера*. Множество C, элементами которого являются все элементы множества A, не принадлежащие множеству B, называют *разностью* множеств A и B и записывают $C = A \setminus B$ (на рисунке 51 множество C закрашено).

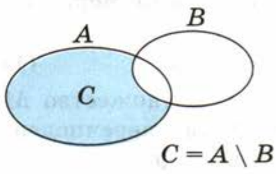


Рис. 51

Например:

1) если $A = \{a, b, c\}$, $B = \{a, b\}$, то $A \setminus B = \{c\}$;
2) если $A = \{a, b, c\}$, $B = \{c, d\}$, то $A \setminus B = \{a, b\}$;
3) если $A = \{a, b\}$, $B = \{c\}$, то $A \setminus B = \{a, b\}$;
4) если $A = \{a, b\}$, $B = \{a, b, c\}$, то $A \setminus B = \varnothing$.

Если $B \subset A$, то разность $A \setminus B$ называют *дополнением* множества B до множества A (на рисунке 52 такое дополнение закрашено).

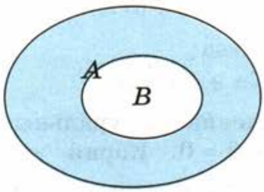


Рис. 52

3. Числовые множества

Школьный курс математики начинается с изучения множества *натуральных чисел* $\boldsymbol{N}$, т. е. чисел счёта 1, 2, 3, 4, 5, ... Дополняя множество *натуральных чисел* $\boldsymbol{N}$ нулём и числами, противоположными натуральным, получаем множество *целых чисел* $\boldsymbol{Z}$, т. е. числа $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$.

Дополняя множество целых чисел обыкновенными дробями, получаем множество *рациональных чисел* $\boldsymbol{Q}$, т. е. чисел вида $\frac{m}{n}$, где m — целое число, n — натуральное число. При этом любое целое число m является рациональным, так как может быть представлено в виде $\frac{m}{1}$. Напомним, что любое рациональное число может быть записано в виде бесконечной периодической десятичной дроби.

Дополняя множество рациональных чисел иррациональными числами (бесконечными непериодическими десятичными дробями), получаем множество всех *действительных чисел*, которое обозначается $\boldsymbol{R}$.

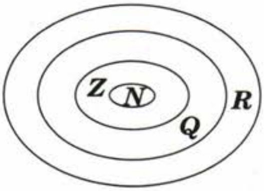


Рис. 53

Описанный выше процесс расширения понятия числа с помощью кругов Эйлера изображён на рисунке 53.

Используя символику теории множеств, можно сказать, что множество $C = \boldsymbol{Z} \setminus \boldsymbol{N}$ есть дополнение множества натуральных чисел до множества целых чисел, т. е. является множеством чисел $0, -1, -2, -3, \ldots$.

4. Пересечение и объединение множеств

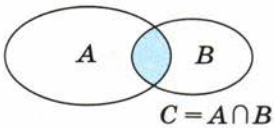


Рис. 54

Множество, состоящее из всех тех и только тех элементов, которые принадлежат как множеству A, так и множеству B, называют *пересечением* множеств A и B и обозначают $A \cap B$.

Знак $\cap$ называют знаком пересечения. На рисунке 54 закрашено пересечение множеств A и B.

Если $A \cap B = \varnothing$, то множества A и B называют *непересекающимися*.

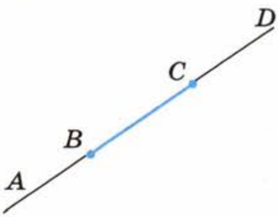


Рис. 55

Например:

1) $\{1; 2; 3\} \cap \{1; 3; 4\} = \{1; 3\}$;

2) $\{a; b\} \cap \{c\} = \varnothing$;

3) пересечением лучей CA и BD на рисунке 55 является отрезок BC.

Отметим, что знак фигурной скобки при записи систем уравнений и неравенств означает, что при решении систем нужно найти пересечение множеств решений уравнений и неравенств, входящих в систему.

Задача 2 Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + x - 2 = 0, \\ x^2 + 2x - 3 = 0. \end{cases} \qquad (1)$$

▶ $\{1; -2\}$ — множество корней уравнения $x^2 + x - 2 = 0$, $\{1; -3\}$ — множество корней уравнения $x^2 + 2x - 3 = 0$. Множество решений системы (1) есть пересечение множеств корней входящих в неё уравнений, т. е. $\{1; -2\} \cap \{1; -3\} = \{1\}$.

Ответ $x = 1$. ◁

Множество, состоящее из всех тех и только тех элементов множеств A и B, которые принадлежат хотя бы одному из этих множеств, называют *объединением* множеств A и B и обозначают $A \cup B$.

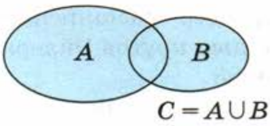


Рис. *56*

Знак $\cup$ называется знаком объединения. На рисунке 56 с помощью кругов Эйлера изображены элементы множеств A и B, а закрашено объединение этих множеств. Например:

1) $\{a; b; c\} \cup \{d; e\} = \{a; b; c; d; e\}$;

2) $\{1; 2\} \cup \{1; 3; 4\} = \{1; 2; 3; 4\}$;

3) объединением лучей CA и BD является прямая AD (см. рис. 55);

4) множество решений неравенства $x^2 - 5x + 6 > 0$ можно записать в виде $(-\infty; 2) \cup (3; +\infty)$.

Задача 3 Решить уравнение

$$(x^2 + x - 2)(x^2 - 4) = 0. \qquad (2)$$

▶ Уравнение $x^2 + x - 2 = 0$ имеет корни -1 и 2, а уравнение $x^2 - 4 = 0$ — корни -2 и 2. Множество C корней уравнения (2) — объединение множеств $\{-1; 2\}$ и $\{-2; 2\}$, т. е. $C = \{-1; 2\} \cup \{-2; 2\} = \{-2; -1; 2\}$.

Ответ $x_1 = -2$, $x_2 = -1$, $x_3 = 2$. ◁

З а м е ч а н и е. Решение уравнения (2) сводится к отысканию всех значений x, которые удовлетворяют хотя бы одному из уравнений

$$x^2 + x - 2 = 0, \quad x^2 - 4 = 0. \qquad (3)$$

В этом случае говорят, что уравнение (2) можно заменить *совокупностью уравнений* (3), которую записывают с помощью квадратной скобки:

$$\left[\begin{array}{l} x^2 + x - 2 = 0, \\ x^2 - 4 = 0. \end{array}\right.$$

Совокупности уравнений часто записывают перечислением этих уравнений, как это сделано, например, для уравнений (3).

Упражнения

417 Определить, верно ли высказывание:
$5 \in M$; $6 \in M$; $\frac{1}{4} \in M$; $-3 \notin M$,
если $M = \{2; 4; 6; 8\}$.

418 Пусть A — множество всех натуральных делителей числа 18. Верно ли, что $1 \in A$? $2 \notin A$? $6 \notin A$? $8 \notin A$?

419 Пусть B — множество всех натуральных делителей числа 12. Верно ли, что $12 \in B$? $3 \in B$? $4 \notin B$? $10 \in B$?

420 Записать все подмножества множества:

1) $M = \{7; 8\}$; 2) $N = \{1; 5\}$;
3) $A = \{1; 2; 3\}$; 4) $B = \{4; 5; 6\}$.

421 Найти все элементы множества:

1) $A = \{x: x \in N, 2x < 7\}$; 2) $M = \{a: a \in \boldsymbol{Z}, -2\frac{1}{2} \leqslant a \leqslant 3\}$;
3) $C = \{c: c^2 - 6c + 9 = 0\}$; 4) $X = \{x: x^2 + 5x + 6 = 0\}$.

422 На плоскости отмечены точки A и B. Охарактеризовать множество точек M на плоскости, таких, что:

1) $\{M: AM = 3\}$;
2) $\{M: AM = MB\}$.

423 Найти дополнение множества A до множества B, если:

1) $A = \{-6; -4; -2\}$, $B = \{-6; -4; -3; -2\}$;
2) $A = \{-2; 0\}$, $B = \{-2; -1; 0; 1; 2\}$.

424 Найти $A \backslash B$ и $B \backslash A$, если:

1) $A = \{-4; 5; 6\}$, $B = \{-5; -4; -3; -2\}$;
2) $A = \{1; 2; 3\}$, $B = \{-1; 0; 1\}$;
3) $A = \{-1; 0; 1; 2; 3\}$, $B = \{1; 2; 3\}$;
4) $A = \{5; 6; 7\}$, $B = \{-5; 5; -6; 6\}$.

425 Пусть $\boldsymbol{N}$ — множество натуральных чисел, $\boldsymbol{Z}$ — множество целых чисел, $\boldsymbol{Q}$ — множество рациональных чисел, $\boldsymbol{R}$ — множество действительных чисел. Найти:

1) $\boldsymbol{R} \backslash \boldsymbol{Q}$; 2) $\boldsymbol{Z} \backslash \boldsymbol{N}$.

426 Найти $A \cap B$ и $A \cup B$, если:

1) $A = \{a; b; c\}$, $B = \{a; b\}$; 2) $A = \{a; b; c\}$, $B = \{c; d\}$;
3) $A = \{a; b\}$, $B = \varnothing$; 4) $A = \{a\}$, $B = \{c; d; e\}$.

427 Найти $A \cap B$ и $A \cup B$ для множеств, указанных в упражнении 424.

428 Найти пересечение и объединение числовых отрезков $[2; 7]$ и $[4; 9]$.

429 Найти пересечение и объединение числовых отрезков $[6; 8]$ и $[5; 7]$.

430 Записать пересечение и объединение множества корней уравнения $x^2 - 4x - 12 = 0$ с множеством корней уравнения $x^2 - 5x - 14 = 0$.

431 Записать множество A натуральных делителей числа 18 и множество B натуральных делителей числа 45. Найти $A \cap B$. Как называется наибольшее из чисел, принадлежащих множеству $A \cap B$?

432 Пусть C — множество натуральных чисел, кратных числу 18, а D — множество натуральных чисел, кратных числу 45. Охарактеризовать множество $C \cap D$. Как называется наименьшее из чисел, принадлежащее множеству $C \cap D$?

433 Найти $A \cup B$, если
$A = \{x: |x| < 1, x \in \boldsymbol{Z}\}$ и $B = \{x: |x - 1| < 2, x \in \boldsymbol{N}\}$.

434 Найти $A \cup B$, если
$A = \{x\colon x^2 - 6x + 9 \leqslant 0\}$ и $B = \{x\colon |\,x\,| \leqslant 1,\ x \in \boldsymbol{Z}\}$.

435 Найти $A \cup B \cup C$ и $A \cap B \cap C$, если:
1) $A = \{-2; -1; 0; 1; 2; 3\}$, $B = \{-1; 0; 1; 2; 3; 4; 5\}$,
$C = \{0; 1; 2; 3; 4; -1; -2; -3\}$;
2) $A = \{x\colon x \leqslant 1\}$, $B = \{x\colon -1 \leqslant x \leqslant 1,\ x \in \boldsymbol{Z}\}$,
$C = \{x\colon -2 \leqslant x \leqslant 0\}$.

436 Пусть A_1 — множество всех квадратов, A_2 — множество всех прямоугольников, A_3 — множество всех ромбов, A_4 — множество всех параллелограммов. Найти множества:
1) $A_1 \cap A_2$; 2) $A_1 \cup A_2$; 3) $A_2 \cap A_3$; 4) $A_3 \cap A_4$; 5) $A_3 \cup A_4$; 6) $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$; 7) $A_4 \cap A_3 \cap A_2 \cap A_1$.

§ 32 Высказывания. Теоремы

1. Высказывания

Любое утверждение, о котором имеет смысл говорить, что оно истинно (верно) или ложно (неверно), называется *высказыванием*.

Например, высказываниями являются следующие утверждения: 1) «число −30 является целым числом» (это утверждение истинно); 2) «Волга впадает в Каспийское море» (истинное утверждение); 3) «5 > 7» (ложное утверждение).

Из каждого высказывания v можно получить новое высказывание, отрицая его, т. е. утверждая, что высказывание v не выполняется. Такое высказывание будет либо истинным, либо ложным. Его называют *отрицанием* высказывания v и обозначают $\overline{v}$ (читается «не v» или «v с чертой»).

Например, для высказывания v: «число 7 чётное», высказывание $\overline{v}$ можно сформулировать следующим образом: «число 7 нечётное» или «число 7 не является чётным». Заметим, что здесь высказывание v — ложно, а высказывание $\overline{v}$ — истинно. И в других случаях, если одно из высказываний v или $\overline{v}$ истинно, то другое — ложно.

В таблице приведены примеры высказываний v и их отрицаний $\bar{v}$, запись которых использует математическую символику.

v	$\bar{v}$
$4 + 6 = 10$ (истинно)	$4 + 6 \neq 10$ (ложно)
$2 > 3$ (ложно)	$2 \leqslant 3$ (истинно)
$-10 \in \boldsymbol{Z}$ (истинно)	$-10 \notin \boldsymbol{Z}$ (ложно)
$\boldsymbol{Z} \subset \boldsymbol{Q}$ (истинно)	$\boldsymbol{Z} \not\subset \boldsymbol{Q}$ (ложно)
$\boldsymbol{Z} \cap \boldsymbol{N} = \boldsymbol{N}$ (истинно)	$\boldsymbol{Z} \cap \boldsymbol{N} \neq \boldsymbol{N}$ (ложно)

2. Предложения с переменными

Математика часто использует утверждения, зависящие от переменной. Например: 1) $x > 0$; 2) $x \in \boldsymbol{N}$. Очевидно, что для одних значений x в этих примерах сформулированные утверждения истинны, а для других ложны.

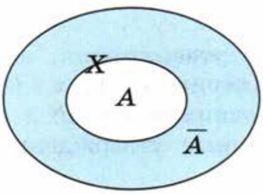
Утверждения подобного рода называют *предложениями с переменной* x и обозначают $p\,(x)$, а в случае зависимости от двух переменных x и y предложения обычно обозначают $p\,(x;\ y)$. Для каждого предложения принято указывать, на каком множестве X оно задано. Если же понятно, о каком множестве идёт речь, то его обычно не указывают. Например, предложение $p\,(x)$: $3x^2 + 5x - 2 = 0$ является уравнением, корень которого предполагается искать на множестве действительных чисел (его корнями являются $x_1 = \frac{1}{3}$, $x_2 = -2$). Если бы требовалось, например, найти только целочисленные корни этого уравнения, то задача была бы сформулирована следующим образом: $3x^2 + 5x - 2 = 0$, $x \in \boldsymbol{Z}$ (решением этого уравнения является $x = -2$).

Множество X, на котором задано предложение $p\,(x)$, можно разбить на два подмножества: одно содержит те элементы X, для которых предложение $p\,(x)$ истинно (его называют *множеством истинности*), другое — для которых $p\,(x)$ ложно. Если первое из подмножеств обозначить A, то второе будет множеством $\overline{A}$. Ясно, что каждое из множеств A и $\overline{A}$, является дополнением другого до множества X.

Например, множеством истинности A неравенства $x^2 - 1 < 0$ является интервал $(-1; 1)$, а множеством $\overline{A}$ является дополнение этого интервала до множества всех действительных чисел: $(-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$.

Два предложения $p\ (x)$ и $q\ (x)$, заданные на одном и том же множестве и имеющие равные множества истинности, называют *равносильными*. Например, предложения $x^2 \leqslant 4$ и $|\,x\,| \leqslant 2$, являющиеся неравенствами, равносильны, так как у них множества истинности равны — это отрезок $[-2; 2]$.

Предложение $\overline{p\ (x)}$ (определённое на множестве X) называют *отрицанием* предложения $p\ (x)$ (определённого на том же множестве X), если оно обращается в истинное (ложное) высказывание для тех и только тех значений x, для которых $p\ (x)$ ложно (истинно). Если A — множество истинности предложения $p\ (x)$, то $\overline{A}$ будет множеством истинности предложения $\overline{p\ (x)}$. На рисунке 57 с помощью кругов Эйлера показано соотношение между элементами множеств X, A и $\overline{A}$.



$A \cup \overline{A} = X,\ A \cap \overline{A} = \varnothing$

Рис. **57**

3. Символы общности и существования

Если в математике хотят сказать, что некоторое предложение $p\ (x)$ верно для всех $x \in X$, то записывают так: $(\forall x)\ p\ (x)$.

Знак общности $\forall$ — перевёрнутая первая заглавная буква английского слова *All* (все) заменяет слова «для любого», «для всех», «для каждого».

Если хотят сказать, что предложение $p\ (x)$ истинно хотя бы для одного значения $x \in X$, то записывают $(\exists x)\ p\ (x)$.

Знак существования $\exists$ — зеркально отражённая первая заглавная буква английского слова *Exists* (существует) — заменяет слова «существует», «найдётся», «хотя бы один».

Каждое из высказываний $(\forall x)\ p\ (x)$ и $(\exists x)\ p\ (x)$ может быть либо истинным, либо ложным.

Например:

1) если предложением $p\ (x)$ является неравенство $|\,x\,| \geqslant 0$, то истинными будут как высказывание

$(\forall x)\ p\ (x)$, так и высказывание $(\exists x)\ p\ (x)$; 2) если предложением $p\ (x)$ является неравенство $x^2 \geqslant 1$, то $(\exists x)\ p\ (x)$ — истинное высказывание, так как, например, при $x = 2$ предложение $p\ (x)$ истинно: $2^2 \geqslant 1$; высказывание же $(\forall x)\ p\ (x)$ ложно, так как, например, при $x = 0{,}5$ предложение $p\ (x)$ ложно.

Отметим, что для опровержения высказывания вида $(\forall x)\ p\ (x)$ достаточно привести *контрпример*, т. е. пример невыполнения высказывания $p\ (x)$ хотя бы для одного $x \in X$.

4. Прямая и обратная теоремы

Многие теоремы в математике формулируются по следующей схеме: «Для любого элемента $x \in X$ из предложения $p\ (x)$ следует предложение $q\ (x)$» или коротко:

$$(\forall x)\ p\ (x) \Rightarrow q\ (x),\ x \in X, \tag{1}$$

где знак следования $\Rightarrow$ заменяет слова «откуда следует», «тогда», «если..., то...».

Часто запись (1) заменяют более короткой:

$$p\ (x) \Rightarrow q\ (x). \tag{2}$$

Предложение $p\ (x)$ в утверждении (1) называется условием теоремы, а предложение $q\ (x)$ — заключением теоремы.

Рассмотрим несколько примеров.

1) В теореме Пифагора условие $p\ (x)$ можно сформулировать так: «x — прямоугольный треугольник»; заключение $q\ (x)$: «В треугольнике x сумма квадратов двух сторон равна квадрату третьей стороны».

Используя терминологию логики, теорему Пифагора можно сформулировать, например, так: «Если некоторый треугольник прямоугольный, то сумма квадратов двух его сторон равна квадрату третьей стороны».

2) Теорема «Биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке» является краткой (удобной для заучивания) формулировкой теоремы «Если фигура x — треугольник, то биссектрисы его углов пересекаются в одной точке». Здесь условием теоремы является предложение: «Фигура x — треугольник (любой треугольник)», а заключени-

ем является предложение: «Биссектрисы углов фигуры x пересекаются в одной точке».

3) В теореме Виета «Если x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2 + px + q = 0$, то справедливы формулы $x_1 + x_2 = -p$, $x_1 \cdot x_2 = q$» условием является предложение «x_1 и x_2 — корни квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$». Заключение теоремы есть предложение «$x_1 + x_2 = -p$, $x_1 \cdot x_2 = q$».

Теоремы $p(x) \Rightarrow q(x)$ и $q(x) \Rightarrow p(x)$ называются *взаимно обратными теоремами*. Иногда одну из этих теорем называют прямой, а другую — обратной. Ясно, что любую из двух взаимно обратных теорем можно принять за прямую.

Из определения взаимно обратных теорем следует, что если в формулировке прямой теоремы поменять местами условие и заключение, то получится формулировка обратной теоремы. Например:

1) теорему, обратную теореме Пифагора, можно сформулировать так: «Если сумма квадратов двух сторон треугольника равна квадрату третьей стороны, то этот треугольник прямоугольный»;

2) в теореме Виета, поменяв местами условие и заключение, имеем условие «$x_1 + x_2 = -p$, $x_1x_2 = q$» и заключение «x_1 и x_2 корни квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$».

Традиционно теорема, обратная теореме Виета, формулируется так: «Если числа x_1, x_2, p и q таковы, что $x_1 + x_2 = -p$ и $x_1x_2 = q$, то числа x_1 и x_2 являются корнями уравнения $x^2 + px + q = 0$».

Важно знать, что среди пар взаимно обратных теорем обе могут быть верными (как, например, для теорем Виета и Пифагора); обе могут быть неверными; одна из них может быть верной, а другая — неверной.

Например:

1) теоремы прямая «Если натуральное число оканчивается цифрой 0, то оно делится на 10» и ей обратная «Если натуральное число делится на 10, то оно оканчивается цифрой 0» верны (истинны) обе;

2) неверными являются и прямая теорема «Если многоугольник x — треугольник, то сумма его углов равна 360°» и ей обратная «Если сумма углов многоугольника x равна 360°, то этот многоугольник — треугольник»;

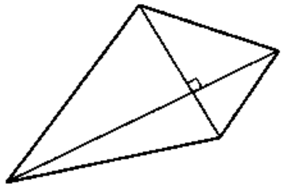


Рис. 58

3) теорема «Диагонали любого ромба взаимно перпендикулярны» верна; обратная же ей теорема «Если диагонали четырёхугольника взаимно перпендикулярны, то этот четырёхугольник является ромбом» неверна, так как можно привести пример четырёхугольника с взаимно перпендикулярными диагоналями, не являющегося ромбом (рис. 58).

5*. Необходимые и достаточные условия

Если теорема $p(x) \Rightarrow q(x)$ верна, то её условие $p(x)$ называют *достаточным условием* для заключения $q(x)$, а заключение $q(x)$ называют *необходимым условием* для $p(x)$.

Например, теорема «Диагонали ромба взаимно перпендикулярны» верна, значит, её условие $p(x)$ «Четырёхугольник x — ромб» является достаточным условием для заключения $q(x)$ «Диагонали четырёхугольника x взаимно перпендикулярны». Таким образом, для того чтобы диагонали четырёхугольника были перпендикулярны, достаточно, чтобы этот четырёхугольник был ромбом. Заключение этой теоремы $q(x)$ является необходимым для условия этой теоремы $p(x)$. Можно сказать, что, для того чтобы четырёхугольник был ромбом, необходимо, чтобы его диагонали были перпендикулярны.

Если верна не только теорема $p(x) \Rightarrow q(x)$, но и ей обратная $q(x) \Rightarrow p(x)$, то $p(x)$ является *необходимым и достаточным условием* для $q(x)$, а $q(x)$ является необходимым и достаточным условием для $p(x)$.

Например, верными являются как теорема Пифагора, так и ей обратная, поэтому сформулировать её можно так: «Для того чтобы треугольник был прямоугольным, необходимо и достаточно, чтобы сумма квадратов двух его сторон была равна квадрату третьей».

Заметим, что слова «необходимо и достаточно» в формулировках теорем часто заменяют словами «тогда и только тогда», «в том и только в том случае», «те и только те».

6*. Противоположные теоремы

Теоремы $p(x) \Rightarrow q(x)$ и $\overline{p(x)} \Rightarrow \overline{q(x)}$ называются *взаимно противоположными*.

Например, для теоремы «Сумма (внутренних) углов треугольника равна 180°» противоположной будет теорема, в которой вместо условия и заключения будут сформулированы их отрицания: «У многоугольника, не являющегося треугольником, сумма (внутренних) углов отлична от 180°». Обе эти теоремы верны.

Бывают случаи, когда одна из взаимно противоположных теорем верна, а другая нет. Например, для теоремы о перпендикулярности диагоналей ромба противоположная ей теорема не верна.

Если теорема $q(x) \Rightarrow p(x)$ обратная для теоремы $p(x) \Rightarrow q(x)$, то теорема $\overline{q(x)} \Rightarrow \overline{p(x)}$ называется *противоположной обратной*.

Можно показать, что пары теорем: 1) $p(x) \Rightarrow q(x)$ и $\overline{q(x)} \Rightarrow \overline{p(x)}$ (прямая и противоположная обратной); 2) $q(x) \Rightarrow p(x)$ и $\overline{p(x)} \Rightarrow \overline{q(x)}$ (обратная и противоположная) — всегда одновременно истинны или ложны.

Например:

— *прямая* теорема «Биссектрисы внутренних углов треугольника пересекаются в одной точке» истинна;

— *обратная* ей теорема «Если биссектрисы внутренних углов многоугольника пересекаются в одной точке, то этот многоугольник является треугольником» ложна (например, у ромба, являющегося четырёхугольником, биссектрисы внутренних углов пересекаются в одной точке);

— *противоположная* теорема «Если многоугольник не является треугольником, то биссектрисы его внутренних углов не пересекаются в одной точке» ложна (контрпример — ромб);

— теорема, *противоположная обратной* «Если биссектрисы внутренних углов многоугольника не пересекаются в одной точке, то этот многоугольник не является треугольником», истинна.

Нередко доказательство прямой теоремы бывает затруднительно (в этом учащиеся убедились в курсе планиметрии). Тогда прибегают к доказательству *методом от противного*, которое заключается в доказательстве вместо прямой теоремы $p(x) \Rightarrow q(x)$ теоремы, противоположной обратной $\overline{q(x)} \Rightarrow \overline{p(x)}$.

Упражнения

437 Сформулировать высказывание $\overline{v}$, если известно высказывание v:

1) $7 = 7$;

2) $45 \geqslant 3$;

3) любое натуральное число является целым числом;

4) у Земли только один естественный спутник.

438 Найти множество истинности предложения:

1) n — натуральный делитель числа 42;

2) k — натуральное число, кратное числу 5, но меньшее, чем 30;

3) $-5 < x < 1$, $x \in \boldsymbol{Z}$; 4) $\begin{cases} x^2 - 2x + 1 \leqslant 0, \\ x > 0. \end{cases}$

439 Найти множество истинности для предложения $\overline{p\,(x)}$, если дано предложение $p\,(x)$:

1) $-4 \leqslant x \leqslant 2$; 2) $x \in (-\infty; 2) \cup (3; +\infty)$;

3) $-x^2 - 3x + 4 = 0$; 4) $x^2 + 9 \leqslant 0$.

440 Для каждого из предложений $p\,(x)$:

1) $\sqrt{x} = 6$; 2) $|\,x\,| > -3$; 3) $x^2 + 8 = 0$; 4) $x^2 - 7 > 0$

определить, истинным или ложным является высказывание $(\forall x)\, p\,(x)$; $(\exists x)\, p\,(x)$.

441 Определить, истинным или ложным является высказывание

$(\forall x)\, p\,(x)$; $(\exists x)\, p\,(x)$ для каждого из предложений $p\,(x)$:

1) треугольник x — равнобедренный;

2) параллелограмм x является квадратом;

3) вписанный угол x равен половине дуги, на которую он опирается;

4) сумма внутренних углов выпуклого четырёхугольника равна 360°.

442 Выделить условие и заключение теоремы; сформулировать теорему, обратную данной:

1) если сумма цифр числа делится на 3, то и само число делится на 3;

2) каждый член арифметической прогрессии (начиная со второго) равен полусумме соседних с ним членов.

443 Сформулировать теорему, обратную теореме:

1) сумма противоположных углов четырёхугольника, вписанного в окружность, равна 180°;

2) если две параллельные прямые пересечены секущей, то образовавшиеся накрест лежащие углы равны;

3) около любого прямоугольника можно описать окружность;

4) диагональ параллелограмма делит его на два равных треугольника.

Установить, истинной или ложной является каждая из этих теорем.

444 Привести контрпример, опровергающий утверждение:

1) в любой четырёхугольник можно вписать окружность;

2) для любого треугольника сумма квадратов двух его сторон равна квадрату третьей стороны;

3) сумма чисел с разными знаками есть число отрицательное;

4) в равнобедренном треугольнике один угол тупой.

445 Доказать или опровергнуть высказывание:

1) сумма двух последовательных натуральных чисел есть число чётное;

2) сумма трёх последовательных натуральных чисел делится на 3.

446 Заменить многоточие словами «необходимо», «достаточно» или «необходимо и достаточно» таким образом, чтобы полученное утверждение было истинным:

1) для того чтобы сумма двух натуральных чисел делилась на 2, ..., чтобы числа были чётными;

2) для того чтобы число делилось на 9, ..., чтобы сумма его цифр делилась на 9;

3) для того чтобы числа x_1 и x_2 были корнями уравнения $x^2 + px + q = 0$, ..., чтобы $x_1x_2 = q$.

§ 33 Уравнение окружности

1. Расстояние между двумя точками

Пусть на координатной плоскости заданы две точки $A\ (x_1;\ y_1)$ и $B\ (x_2;\ y_2)$ и $x_1 \neq x_2$, $y_1 \neq y_2$. Найдем расстояние между точками A и B (т. е. найдём длину отрезка AB).

Проведём через точки A и B прямые, перпендикулярные осям абсцисс и ординат. Точки пере-

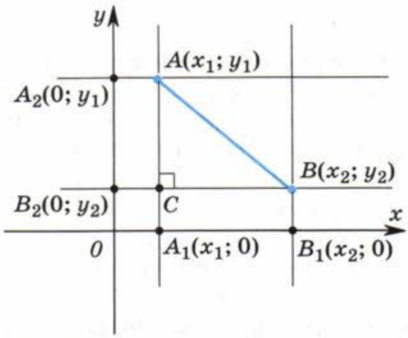


Рис. 59

сечения этих прямых с осями обозначим $A_1\ (x_1;\ 0)$, $B_1\ (x_2;\ 0)$ и $A_2\ (0;\ y_1)$, $B_2\ (0;\ y_2)$ соответственно (рис. 59). Точка C при данном расположении точек A и B — точка пересечения прямых AA_1 и BB_2.

Тогда $BC = B_1A_1 = |\ x_2 - x_1\ |$, а $AC = A_2B_2 = |\ y_2 - y_1\ |$. Применяя теорему Пифагора к прямоугольному треугольнику ABC, получим

$$AB^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2, \qquad (1)$$

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \qquad (1')$$

Формула (1′) *расстояния между двумя точками* выведена из предположения, что $x_1 \neq x_2$ и $y_1 \neq y_2$. Однако она верна и в случае, когда справедливо хотя бы одно из равенств $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$. Например, если $x_1 = x_2$ и $y_1 \neq y_2$, то $AB = |\ y_2 - y_1\ |$. Этот же результат даёт и формула (1′):

$$AB = \sqrt{0^2 + (y_2 - y_1)^2} = |y_2 - y_1|.$$

Задача 1 Найти расстояние между точками $A\ (-2;\ 3)$ и $B\ (-5;\ -1)$.

▶ По условию $x_1 = -2$, $y_1 = 3$, $x_2 = -5$, $y_2 = -1$. Согласно формуле (1′) имеем

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} =$$
$$= \sqrt{(-5 - (-2))^2 + (-1 - 3)^2} = \sqrt{9 + 16} = 5.$$

Ответ $AB = 5$. ◁

Задача 2 На оси ординат найти точку M, равноудалённую от точек $N\ (4;\ -3)$ и $K\ (-1;\ 0)$.

▶ Абсцисса точки M равна нулю. Обозначим её ординату через y_0. Зная, что расстояния от точки $M\ (0;\ y_0)$ до точек N и K равны, на основании формулы (1) запишем уравнение

$$(0 - 4)^2 + (y_0 + 3)^2 = (0 + 1)^2 + (y_0 - 0)^2,$$
$$16 + {y_0}^2 + 6y_0 + 9 = 1 + {y_0}^2,$$
$$6y_0 = -24,\ y_0 = -4.$$

Ответ $M\ (0;\ -4)$. ◁

2. Уравнение окружности

Уравнение фигуры на координатной плоскости — это уравнение с двумя неизвестными x и y. Говорят, что фигура Φ задана в прямоугольной системе координат данным уравнением, если фигуре Φ принадлежат те и только те точки плоскости, координаты которых удовлетворяют этому уравнению.

Иными словами, фигура Φ задана конкретным уравнением, когда выполняются два условия:

1) если точка $A\ (x;\ y)$ принадлежит фигуре Φ, то её координаты удовлетворяют данному уравнению;

2) если числа x и y удовлетворяют данному уравнению, то точка $A\ (x;\ y)$ принадлежит фигуре Φ.

Второе предложение можно выразить иначе: координаты любой точки $A\ (x;\ y)$, не принадлежащей фигуре Φ, не удовлетворяют данному уравнению.

Замечание. Сформулированные предложения 1) и 2) выражают необходимое и достаточное условие того, что некоторая фигура Φ задаётся определённым уравнением.

Теорема. Уравнение

$$(x-m)^2+(y-n)^2=r^2 \qquad (2)$$

является уравнением окружности с центром в точке $M\ (m;\ n)$ радиуса r.

1) Если точка $A\ (x;\ y)$ принадлежит рассматриваемой окружности (рис. 60), то расстояние от неё до центра окружности $M\ (m;\ n)$ равно r, т. е. $AM = r$. Согласно формуле (1) можно записать $(x-m)^2 + (y-n)^2 = r^2$, что совпадает с уравнением (2).

2) Если координаты точки $A\ (x;\ y)$ удовлетворяют уравнению (2), то эта точка принадлежит окружности, так как расстояние от неё до центра окружности M равно r.

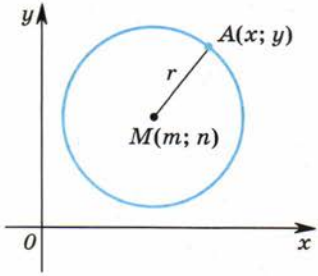


Рис. 60

Заметим, что если точка $A\ (x;\ y)$ не принадлежит окружности, то $AM \neq r$ и её координаты не удовлетворяют уравнению (2).

Таким образом, уравнение (2) является уравнением окружности.

Если центром окружности является начало координат, то её уравнение имеет вид

$$x^2+y^2=r^2. \qquad (3)$$

Задача 3 Записать уравнение окружности с центром в точке M $(-2; 5)$ и радиусом $r = 3$.

▶ Абсцисса точки M равна $m = -2$, а её ордината $n = 5$. Применяя формулу (2), запишем уравнение окружности $(x - (-2))^2 + (y - 5)^2 = 3^2$.

Ответ $(x + 2)^2 + (y - 5)^2 = 9$. ◁

Задача 4 Записать уравнение окружности с центром в точке M $(6; 1)$, проходящей через точку A $(3; -4)$.

▶ По формуле (1) расстояния между двумя точками имеем $r^2 = AM^2 = (3 - 6)^2 + (-4 - 1)^2 = 9 + 25 = 34$. Согласно формуле (2) уравнение окружности имеет вид $(x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 34$.

Ответ $(x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 34$. ◁

Задача 5 Определить вид фигуры, заданной уравнением $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 5 = 0$.

▶ Преобразуем заданное уравнение к виду (2):

$$(x^2 - 6x + 9) - 9 + (y^2 + 4y + 4) - 4 + 5 = 0,$$

откуда $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 8$.

Ответ Окружность с центром в точке M $(3; -2)$ и радиусом $r = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$. ◁

Упражнения

447 Найти расстояние между точками A и B, если:
1) A $(0; -2)$, B $(4; 0)$; 2) A $(-4; 0)$, B $(0; 2)$;
3) A $(-1; -3)$, B $(1; 2)$; 4) A $(3; 1)$, B $(-2; -1)$;
5) A $(4; -5)$, B $(-3; 2)$; 6) A $(-3; 6)$, B $(3; -2)$.

448 Записать уравнение окружности с центром в начале координат и радиусом r, если:
1) $r = 6$; 2) $r = 7$.

449 Выяснить, какие из точек A $(-3; 4)$, B $(5; -1)$, C $(-2; -3)$, D $(7; 6)$, E $(0; -5)$, F $(11; -2)$ принадлежат окружности, заданной уравнением:
1) $x^2 + y^2 = 25$; 2) $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 100$.

450 Записать уравнение окружности с центром в точке M и радиусом r, если:
1) M $(0; -2)$, $r = 3$; 2) M $(-3; 0)$, $r = 2$;
3) M $(-1; 3)$, $r = 1{,}5$; 4) M $(-2; 4)$, $r = 0{,}5$;
5) M $(-2; -1)$, $r = 1\frac{2}{3}$; 6) M $(-3; -2)$, $r = 1\frac{3}{4}$.

451 На окружности, заданной уравнением $(x + 4)^2 + (y - 5)^2 = 36$, найти точки:
1) с абсциссой, равной -4; 2) с ординатой, равной 5.

452 Даны точки $A\ (x_1;\ y_1)$ и $B\ (x_2;\ y_2)$, и пусть $C\ (x;\ y)$ — середина отрезка AB. Доказать, что $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$, $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$.

453 Найти координаты точки C — середины отрезка AB, если:
1) $A\ (2;\ -5)$, $B\ (2;\ -3)$;
2) $A\ (0;\ 4)$, $B\ (-3;\ 1)$;
3) $A\ (2{,}5;\ 6)$, $B\ (-1{,}5;\ 5)$;
4) $A\ (-8{,}5;\ 2)$, $B\ (0{,}5;\ -7)$.

454 На оси ординат найти точку K, равноудалённую от точек M и N, если:
1) $M\ (2;\ 3)$, $N\ (-3;\ 1)$;
2) $M\ (1;\ -2)$, $N\ (3;\ 2)$.

455 На оси абсцисс найти точку P, равноудалённую от точек M и N, если:
1) $M\ (-4;\ -1)$, $N\ (-2;\ 3)$;
2) $M\ (2;\ -1)$, $N\ (-3;\ -5)$.

456 Записать уравнение окружности с центром в точке C, проходящей через точку D, если:
1) $C\ (-5;\ 2)$, $D\ (1;\ -1)$;
2) $C\ (2;\ -3)$, $D\ (-1;\ 1)$;
3) $C\ (3;\ 0)$, $D\ (-3;\ -3)$;
4) $C\ (-4;\ -4)$, $D\ (0;\ 2)$.

457 Записать уравнение окружности с диаметром AB, если:
1) $A\ (-4;\ 0)$, $B\ (2;\ -6)$;
2) $A\ (-6;\ 1)$, $B\ (0;\ 3)$.

458 Определить вид фигуры, заданной уравнением:
1) $x^2 + y^2 + 10x - 6y + 18 = 0$;
2) $x^2 + y^2 - 8x - 12y - 12 = 0$;
3) $x\ (x - 2) + y\ (y - 4) = 0$;
4) $x\ (x - 6) + y\ (y + 2) = 0$.

§ 34 Уравнение прямой

В VII классе при решении систем линейных уравнений на основе наглядных представлений мы полагали, что графиком уравнения $ax + by = c$ (где x и y — неизвестные, a, b и c — заданные числа, причём a и b одновременно не равны нулю) является прямая. Однако строго этот факт не доказывался. Теперь у нас есть возможность доказать это утверждение.

Теорема. Уравнение

$$ax + by = c, \tag{1}$$

где a, b и c — заданные числа, причём $a^2 + b^2 \neq 0$, является уравнением прямой.

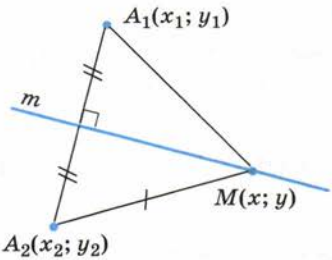


Рис. ***61***

● Пусть m — произвольная прямая координатной плоскости. Отметим на плоскости такие точки $A_1\ (x_1; y_1)$ и $A_2\ (x_2, y_2)$, что прямая m является серединным перпендикуляром к отрезку A_1A_2 (рис. 61).

1) Если точка $M\ (x; y)$ лежит на прямой m, то $A_1M = A_2M$, $A_1M^2 = A_2M^2$, а значит, координаты точки M удовлетворяют уравнению

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2. \tag{2}$$

После возведения в квадрат выражений в скобках и приведения подобных членов уравнение (2) можно записать в виде

$$ax + by = c,$$

где $a = 2\ (x_1 - x_2)$, $b = 2\ (y_1 - y_2)$, $c = x_1^2 + y_1^2 - x_2^2 - y_2^2$. Итак, уравнение любой прямой можно записать в виде (1), где по крайней мере одно из чисел a, b не равно нулю.

2) Если координаты точки M удовлетворяют уравнению (2), а следовательно, и уравнению (1), то $A_1M = A_2M$. Это значит, что точка M лежит на серединном перпендикуляре к отрезку A_1A_2, т. е. лежит на прямой m. Таким образом, можно утверждать, что уравнение (1) является уравнением прямой. ○

Задача 1 Записать уравнение прямой, проходящей через точки $C\ (1; -2)$ и $D\ (-1; 1)$.

▶ Уравнение прямой CD запишем в виде $ax + by = c$. Подставляя координаты точек C и D в это уравнение, получаем $a \cdot 1 + b \cdot (-2) = c$, $a \cdot (-1) + b \cdot 1 = c$, откуда

$$a - 2b = c,\ -a + b = c.$$

Из этих уравнений выразим a и b через c, получим $a = -3c$, $b = -2c$. Подставив эти выражения вместо a и b в уравнение прямой, получим

$$-3cx - 2cy = c. \tag{3}$$

Заметим, что $c \neq 0$, так как в противном случае (т. е. при $c = 0$) и $a = 0$, и $b = 0$, т. е. не будет выполнено условие теоремы $a^2 + b^2 \neq 0$. Поэтому, разделив обе части уравнения (3) на $c \neq 0$, получим искомое уравнение прямой $-3x - 2y = 1$.

Ответ $-3x - 2y = 1$. ◁

Если в уравнении прямой $ax + by = c$ коэффициент $b \neq 0$, то уравнение можно записать в виде $y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$ или в виде

$$y = kx + l, \tag{4}$$

где $k = -\frac{a}{b}$, $l = \frac{c}{b}$.

Возьмём на прямой (не совпадающей с осью ординат) две точки $A_1(x_1; y_1)$ и $A_2(x_2; y_2)$, такие, что $x_2 > x_1$. Координаты этих точек удовлетворяют уравнению (4), т. е. $y_1 = kx_1 + l$ и $y_2 = kx_2 + l$. Вычитая почленно из второго равенства первое, получим $y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1)$, откуда $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

Если $y_2 = y_1$, то прямая параллельна оси абсцисс или совпадает с ней и $k = 0$.

Если $y_2 > y_1$ (рис. 62, *а*), то $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \operatorname{tg}\alpha > 0$.

Если $y_2 < y_1$ (рис. 62, *б*), то $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-(y_1 - y_2)}{x_2 - x_1} = -\operatorname{tg}\alpha < 0$.

Очевидно, что от угла между прямой и осью абсцисс зависит значение коэффициента k, называемого *угловым коэффициентом* прямой, уравнение которой записано в виде (4).

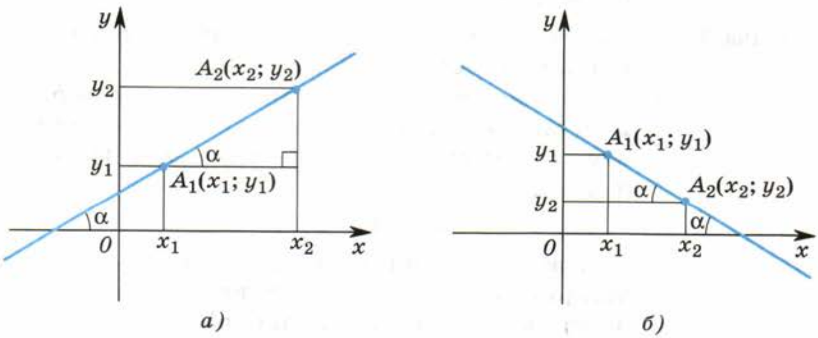


Рис. **62**

Пусть даны уравнения двух прямых $y = k_1x + l_1$, $y = k_2x + l_2$. Несложно убедиться в том, что: 1) при $k_1 = k_2$ и $l_1 = l_2$ прямые совпадают; 2) при $k_1 \neq k_2$ прямые пересекаются (имеют одну общую точку); 3) при $k_1 = k_2$ и $l_1 \neq l_2$ прямые параллельны (не имеют общих точек).

Задача 2 Установить взаимное расположение прямых $x + 3y = 2$ и $2x - y = -3$.

▶ Первое из данных уравнений запишем в виде $y = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$, второе — в виде $y = 2x + 3$. Угловые коэффициенты первой и второй прямых соответственно равны $k_1 = -\frac{1}{3}$ и $k_2 = 2$. Так как $k_1 \neq k_2$, то прямые пересекаются.

Ответ Прямые пересекаются. ◁

Упражнения

459 Записать уравнение прямой, проходящей через начало координат и точку M, если:
1) M (2; 3); 2) M (4; 2); 3) M (–6; 1); 4) M (2; –5).

460 Записать уравнение прямой, проходящей через точки A и B, если:
1) A (0; 2), B (1; –1); 2) A (2; 0), B (–1; –1);
3) A (–5; 6), B (4; –5); 4) A (8; 1), B (–2; –7).

461 Записать уравнения прямых, параллельных осям координат и проходящих через точку:
1) M (–5; 6); 2) N (4; –7).

462 Найти угловой коэффициент k прямой, заданной уравнением:
1) $7x - y = 3$; 2) $4x - y = 5$; 3) $3x + 2y = 1$; 4) $5x + 2y = 2$.

463 (Устно.) Установить взаимное расположение прямых, заданных уравнениями:
1) $y = 3x - 7$ и $y = 7x - 3$; 2) $y = 5x + 4$ и $y = 2x - 6$;
3) $y = -2x + 3$ и $y = -2x + 5$; 4) $y = -x + 6$ и $y = 6 - x$;
5) $y = -5x + 1$ и $y = 1 - 5x$; 6) $y = 6x - 1$ и $y = 6x + 3$.

464 Установить взаимное расположение прямых, заданных уравнениями:
1) $4x - 3y = 2$ и $8x - 6y = 5$;
2) $3x - 2y = 7$ и $6x - 4y = 9$;
3) $-2x + 5y = 10$ и $3x - 4y = 8$;
4) $-4x + 3y = 6$ и $5x - 6y = 12$;
5) $6x - 4y = 10$ и $3x - 2y = 5$;
6) $3x - 2y = -7$ и $-6x + 4y = 14$.

465 Найти координаты точки пересечения прямых, заданных уравнениями:
1) $2x + y = 1$, $x + 2y = 8$;
2) $x - 2y = 8$, $2x + 3y = 9$.

466 Известны координаты вершин треугольника: A (2; 5), B (3; –1), C (–2; 1). Написать уравнение прямой, содержащей медиану треугольника ABC, проходящей через вершину:
1) A; 2) B; 3) C.

467 Известны координаты вершин треугольника: A (6; 0), B (0; –4), C (–4; 4). Написать уравнения прямых, содержащих средние линии треугольника.

468 Найти координаты точек пересечения с осями координат прямой, заданной уравнением:
1) $2x - 3y = 5$; 2) $3x + 4y = 2$.

469 Найти коэффициенты a и b в уравнении прямой $ax + by = 3$, если известно, что она проходит через точки:
1) A (0; –1), B (2; 3);
2) A (–4; 2), B (3; 0).

470 Даны координаты вершин трапеции: A (0; 2), B (4; 0), C (0; –4), D (–2; 0). Записать:
1) уравнения прямых, содержащих диагонали трапеции;
2) уравнение прямой, содержащей среднюю линию трапеции.

§ 35 Множества точек на координатной плоскости

В предыдущих параграфах рассматривались уравнения двух фигур: окружности и прямой. Приведём ещё несколько примеров уравнений фигур, знакомых из курса алгебры:

$$y = x^2,\ y = x^3,\ y = \sqrt{x},\ y = \frac{1}{x}.$$

Фигуру на плоскости можно также задавать системой или совокупностью уравнений (неравенств) с двумя неизвестными. Например, точку O (0; 0) координатной плоскости можно рассматривать как пересечение фигур, заданных уравнениями $x - y = 0$ и $x + y = 0$, т. е. системой уравнений

$$\begin{cases} x - y = 0, \\ x + y = 0. \end{cases}$$

1. Фигура, заданная уравнением или системой уравнений с двумя неизвестными

Задача 1 Определить фигуру, заданную уравнением

$$(y - 1)^2 + (x + 3y)^2 = 0. \quad (1)$$

▶ Имеем $(y - 1)^2 \geqslant 0$ и $(x + 3y)^2 \geqslant 0$, а сумма двух неотрицательных чисел равна нулю, когда каждое из этих чисел равно нулю. Таким образом, фигура, заданная уравнением (1), может быть задана и системой уравнений

$$\begin{cases} y - 1 = 0, \\ x + 3y = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Системе (2), а значит, и уравнению (1) удовлетворяет единственная пара чисел $x = -3$, $y = 1$, определяющая точку $(-3; 1)$ на координатной плоскости.

Ответ Точка с координатами $x = -3$, $y = 1$. ◁

Изображение на координатной плоскости всех точек фигуры, заданной с помощью уравнений, в ряде случаев помогает найти решения этих уравнений (систем; совокупностей уравнений) или по крайней мере сделать предположение о количестве их решений.

Задача 2 Определить фигуру, заданную системой уравнений

$$\begin{cases} y = -x + 1, \\ (x + 2)^2 + y^2 = 9. \end{cases} \quad (3)$$

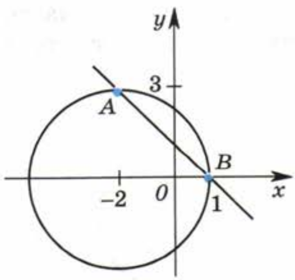


Рис. 63

▶ Фигуры, заданные уравнениями системы (прямая и окружность), изображены на рисунке 63, они пересекаются в точках A и B. Подстановкой в систему (3) значений $x = -2$ и $y = 3$ можно убедиться в том, что точка A имеет координаты $(-2; 3)$.

Аналогично убеждаемся в том, что точка B имеет координаты $(1; 0)$.

Ответ Фигура состоит из двух точек A $(-2; 3)$ и B $(1; 0)$. ◁

Задача 3 На координатной плоскости изобразить фигуру Φ, заданную уравнением $x^2 - y^2 = 0$.

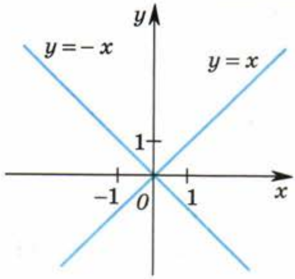


Рис. **64**

▶ Запишем данное уравнение в виде

$$(x - y)(x + y) = 0. \qquad (4)$$

Фигура, заданная уравнением (4), определяется совокупностью уравнений $x - y = 0$ и $x + y = 0$. На рисунке 64 изображена искомая фигура Φ.

Ответ Φ состоит из двух прямых $y = x$ и $y = -x$. ◁

2. Фигура, заданная неравенством или системой неравенств с двумя неизвестными

Говорят, что *фигура Φ задана в прямоугольной системе координат данным неравенством*, если фигуре Φ принадлежат те и только те точки плоскости, координаты которых удовлетворяют этому неравенству. Например, неравенством $x \geqslant 1$ задаётся правая полуплоскость, ограниченная прямой $x = 1$ (рис. 65, *а*); неравенством $x^2 + y^2 \leqslant 4$ задан круг с центром в точке O (0; 0) и радиусом 2 (рис. 65, *б*); неравенством $x^2 + y^2 > 4$ задана часть плоскости, являющаяся дополнением круга с центром в начале координат и радиусом 2 до всей координатной плоскости (рис. 65, *в*).

Если фигура задана уравнением $F(x; y) = 0$ и является линией, разбивающей плоскость на две части, то в одной из частей будет выполняться неравенство $F(x; y) > 0$, а в другой — неравенство $F(x; y) < 0$. Чтобы определить, какое из этих двух неравенств выполняется в конкретной части плоскости, нужно взять произвольную точку с

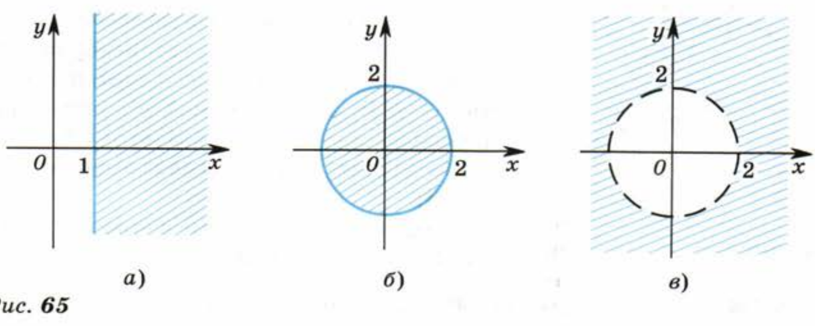


Рис. **65**

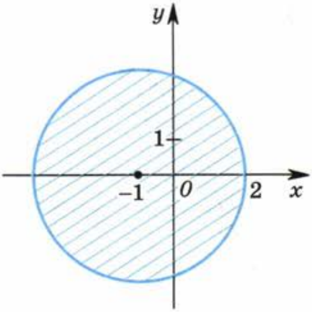


Рис. ***66***

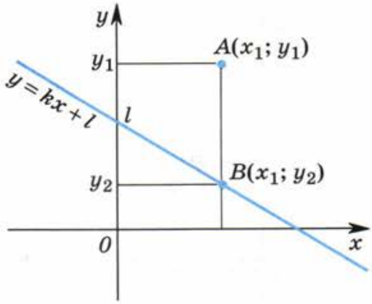


Рис. ***67***

координатами $(x_0; y_0)$ и выяснить знак $F(x_0; y_0)$. Например, для окружности, заданной уравнением $(x + 1)^2 + y^2 = 9$, выясним знак $F(x; y) = (x + 1)^2 + y^2 - 9$. Для точки $O(0; 0)$, принадлежащей (по отношению к окружности) внутренней части плоскости, имеем $F(0; 0) = (0 + 1)^2 + 0^2 - 9 = -8 < 0$. Значит, неравенству $(x + 1)^2 + y^2 - 9 < 0$ (следовательно, и неравенству $(x + 1)^2 + y^2 < 9$) удовлетворяют точки круга с центром в точке $(-1; 0)$ радиуса 3 (рис. 66).

Прямая $y = kx + l$ также разбивает плоскость на две части — полуплоскости. Ту из них, которая содержит, например, точку $(0; l + 1)$, назовём *верхней*. Возьмём в верхней полуплоскости произвольную точку $A(x_1; y_1)$ и через эту точку проведём прямую, перпендикулярную оси абсцисс (рис. 67) и пересекающую прямую $y = kx + l$ в точке $B(x_1; y_2)$. Координаты точки B удовлетворяют уравнению этой прямой. Так как $y_1 > y_2$ (см. рис. 67), то для любой точки A верхней полуплоскости выполняется неравенство $y > kx + l$, а для любой точки $(x; y)$, лежащей ниже прямой $y = kx + l$, — неравенство $y < kx + l$.

Задача 4 Изобразить множество точек плоскости, удовлетворяющих неравенству: 1) $y \leqslant 2 - x$; 2) $y > 2x - 4$.

▶ 1) Неравенству $y \leqslant 2 - x$ удовлетворяют координаты всех точек полуплоскости, лежащих ниже прямой $y = 2 - x$ (на рисунке 68, *а* эта полуплоскость отмечена штриховкой), и точек самой этой прямой.

2) Неравенству $y > 2x - 4$ удовлетворяют координаты точек полуплоскости, лежащих выше пря-

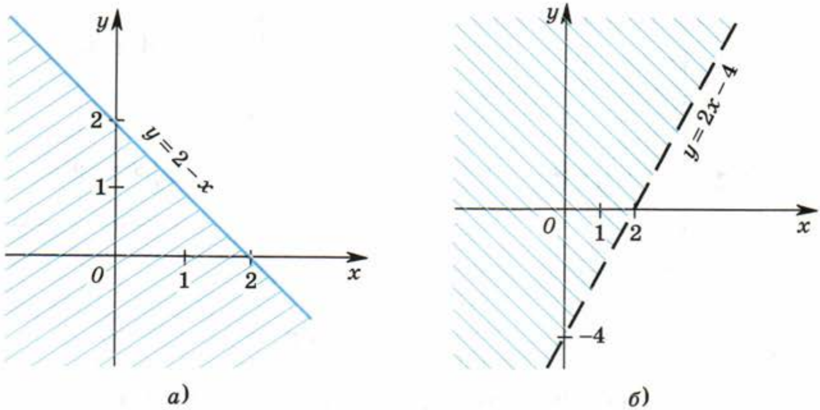


Рис. ***68***

мой $y = 2x - 4$ (эта полуплоскость отмечена штриховкой на рисунке 68, *б*). (Сама прямая в это множество не входит.)

Ответ 1) Рис. 68, *а*; 2) рис. 68, *б*. ◁

Задача 5 На координатной плоскости изобразить множество точек, удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} x + y \leqslant 2. \\ 2x - y < 4. \end{cases}$$

▶ Преобразуем данную систему к виду

$$\begin{cases} y \leqslant 2 - x, \\ y > 2x - 4. \end{cases}$$

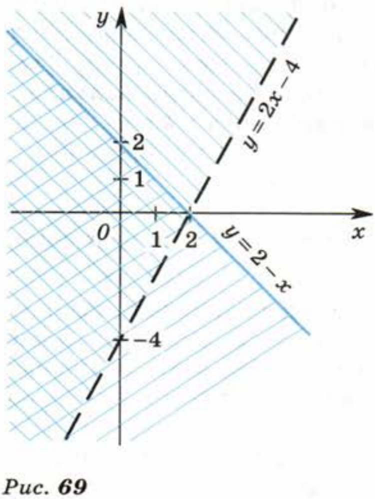


Рис. ***69***

На координатной плоскости (рис. 69) отметим штриховкой множества точек плоскости, удовлетворяющих каждому из неравенств системы (см. решение задачи 4). Точки координатной плоскости, удовлетворяющие как первому, так и второму неравенствам системы (точки той части плоскости, где штриховки пересекаются, и точки прямой $y = 2 - x$), удовлетворяют заданной системе.

Ответ Рисунок 69. ◁

Упражнения

На координатной плоскости изобразить фигуру, заданную уравнением (**471—472**).

471 1) $y = x^2$; 2) $y = \sqrt{x}$; 3) $y = \dfrac{1}{x}$; 4) $y = x^3$.

472 1) $(y+2)^2 + (x-y)^2 = 0$; 2) $(x+y)^2 + (x-3)^2 = 0$.

С помощью графической иллюстрации определить фигуру, заданную системой уравнений (**473—474**).

473 1) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 36, \\ x - y = 3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 16, \\ x + y = 2; \end{cases}$

3) $\begin{cases} y = |x|, \\ (x-1)^2 + y^2 = 9; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^2 + (y-2)^2 = 4, \\ y = |x|. \end{cases}$

474 1) $\begin{cases} y = \sqrt{x}, \\ y = x^2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y = x^3, \\ y = \sqrt{x}. \end{cases}$

475 На координатной плоскости изобразить фигуру, заданную уравнением:
1) $4x^2 - y^2 = 0$; 2) $x^2 - 9y^2 = 0$;
3) $25x^2 - 4y^2 = 0$; 4) $16x^2 - 36y^2 = 0$.

На координатной плоскости штриховкой показать множество точек, удовлетворяющих данному неравенству (**476—478**).

476 1) $y \geqslant 0$; 2) $y \leqslant 0$; 3) $y < -1$; 4) $y > -2$;
5) $x \leqslant 0$; 6) $x \geqslant 0$; 7) $x > -2$; 8) $x < 1$.

477 1) $y > x + 1$; 2) $y < x - 2$; 3) $2x - y \geqslant 1$; 4) $2x + y \geqslant 1$.

478 1) $x^2 + y^2 \leqslant 9$; 2) $x^2 + y^2 < 16$;
3) $x^2 + y^2 > 25$; 4) $x^2 + y^2 \geqslant 36$;
5) $(x+3)^2 + (y-3)^2 < 36$; 6) $(x-2)^2 + (y+4)^2 \geqslant 25$;
7) $(x-1)^2 + (y+2)^2 \geqslant 2\dfrac{1}{4}$; 8) $(x+1)^2 + (y-3)^2 < 1\dfrac{7}{9}$.

На координатной плоскости изобразить множество точек, удовлетворяющих данной системе неравенств (**479—480**).

479 1) $\begin{cases} 3x - y \geqslant 1, \\ 2x + y \geqslant 3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x + y \leqslant 2, \\ 4x - y \leqslant 3; \end{cases}$

3) $\begin{cases} -x + 2y > 4, \\ 3x + y < 1; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 4x + y > 5, \\ -3x + 2y < 4; \end{cases}$

5) $\begin{cases} x - \dfrac{y}{2} \geqslant -1, \\ 2x + y > 2; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 2x - y < -1, \\ x + \dfrac{y}{2} \geqslant 1. \end{cases}$

480 1) $\begin{cases} x^2+y^2<9, \\ 2x-y\leqslant 1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2+y^2\leqslant 16, \\ 3x-y>2; \end{cases}$

3) $\begin{cases} (x-1)^2+(y+2)^2\geqslant 25, \\ 3x+y<2; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} (x+2)^2+(y-1)^2>36, \\ 2x+y\leqslant 4. \end{cases}$

Упражнения к главе VII

481 Записать все подмножества множества:

1) $A=\{8;\ 9\}$; 2) $B=\{1;\ 2\}$; 3) $C=\{a;\ d;\ c\}$; 4) $D=\{m;\ n;\ p\}$.

482 Найти дополнение множества M до множества N, если:
1) $M=\{1;\ 2;\ 3;\ 4\}$, $N=\{2;\ 3\}$;
2) $M=\{-3;\ -1;\ 1;\ 3\}$, $N=\{-1;\ 3\}$;
3) $M=\{a;\ b;\ c;\ d;\ e\}$, $N=\{a;\ d;\ e\}$;
4) $M=\{k;\ l;\ m;\ n;\ p\}$, $N=\{n\}$.

483 Найти $A\backslash B$ и $B\backslash A$, если:
1) $A=\{a;\ b;\ c;\ d\}$, $B=\{c;\ d;\ e\}$;
2) $A=\{b;\ c;\ f\}$, $B=\{a;\ b;\ c;\ d\}$;
3) $A=\{3;\ 4;\ 5;\ 6;\ 7\}$, $B=\{3;\ 5;\ 7;\ 9\}$;
4) $A=\{1;\ 3;\ 5;\ 7\}$, $B=\{1;\ 2;\ 4;\ 5\}$.

484 Найти $M\cup K$ и $M\cap K$, если:
1) $M=\{a;\ b;\ c;\ d\}$, $K=\{b;\ c;\ d;\ e\}$;
2) $M=\{a;\ b;\ c;\ d;\ e\}$, $K=\{a;\ c;\ e;\ k\}$;
3) $M=\{-1;\ 0\}$, $K=\{-3;\ -2;\ -1;\ 0;\ 1\}$;
4) $M=\{-5;\ -3;\ -1\}$, $K=\{1;\ 2;\ 3\}$.

485 Найти объединение и пересечение отрезков:
1) $[-1;\ 3]$ и $[0;\ 4]$; 2) $[-6;\ -2]$ и $[-4;\ 2]$;
3) $[-6;\ -3]$ и $[-3;\ 0]$; 4) $[-5;\ -2]$ и $[-2;\ 2]$.

486 Сформулировать высказывание $\overline{v}$, если известно высказывание v:
1) $5\neq 5$; 2) $17=17$; 3) $23\geqslant 10$; 4) $15<7$.

Найти множество истинности предложения **(487—488)**.

487 1) n — натуральное число, кратное 3, но меньшее, чем 20;
2) n — натуральный делитель числа 45;
3) $-2\leqslant y<1$, $y\in \boldsymbol{Z}$;
4) $-4<z\leqslant 2$, $z\in \boldsymbol{Z}$.

488 1) $\begin{cases} x^2+6x+9=0, \\ x^2+x-6=0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2-5x+4=0, \\ x^2-8x+16=0; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2-4x+4\leqslant 0, \\ x\geqslant 0; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^2-2x+1\geqslant 0, \\ (x+3)^2=0; \end{cases}$

489 Для каждого из предложений $p\ (x)$:
1) $x^2=10$; 2) $x^2+2=0$; 3) $x^2-8=0$; 4) $|\,x\,|=3$
определить, истинным или ложным является высказывание $(\forall x)\ p\ (x)$; $(\exists x)\ p\ (x)$.

490 Привести контрпример, опровергающий утверждение:
1) любое чётное число делится на 4;
2) любое нечётное число делится на 3;
3) около любого четырёхугольника можно описать окружность;
4) сумма внутренних углов любого многоугольника равна 360°.

491 Найти расстояние между точками M и N, если:
1) $M\ (-2;\ 3)$, $N\ (3;\ -2)$; 2) $M\ (-5;\ 1)$, $N\ (1;\ -5)$;
3) $M\ (-5;\ -4)$, $N\ (0;\ 2)$; 4) $M\ (3;\ 0)$, $N\ (-6;\ -3)$.

492 Записать уравнение окружности с центром в начале координат и радиусом r, если:
1) $r=2{,}5$; 2) $r=1{,}5$.

493 Записать уравнение окружности с центром в точке C и радиусом r, если:
1) $C\ (-4;\ 5)$, $r=3$; 2) $C\ (2;\ -6)$, $r=4$;
3) $C\ (0{,}5;\ -1)$, $r=6$; 4) $C\ (-1{,}5;\ -3)$, $r=5$.

494 Выяснить, какие из точек $A\ (1;\ 3)$, $B\ (1;\ 2)$, $C\ (0;\ 1)$, $D\ (-1;\ 1)$ принадлежат окружности, заданной уравнением:
1) $x^2+(y-2)^2=2$; 2) $(x+1)^2+(y-3)^2=5$.

495 Записать уравнение прямой, проходящей через точки M и N, если:
1) $M\ (7;\ 0)$, $N\ (0;\ -6)$; 2) $M\ (0;\ -4)$, $N\ (5;\ 0)$;
3) $M\ (-8;\ 10)$, $N\ (7;\ -2)$; 4) $M\ (6;\ -9)$, $N\ (-7;\ 5)$.

496 Найти угловой коэффициент прямой, заданной уравнением:
1) $3x-2y=5$; 2) $-4x+3y=1$;
3) $\frac{2}{3}x-\frac{y}{2}=-1$; 4) $\frac{x}{2}+\frac{3}{4}y=1$.

497 Среди прямых, заданных уравнениями
$x+y=1$, $2x-4y=3$, $2x+2y=5$, $-x+2y=4$,
указать пары параллельных прямых.

498 Среди прямых, заданных уравнениями
$3x+y=2$, $-2x+y=3$, $\frac{x}{2}+y=2$, $4x-2y=1$,
указать те, которые пересекают прямую $2x-y=1$.

499 На координатной плоскости изобразить фигуру, заданную уравнением:

1) $-3x + y = 2$;
2) $4x - y = 1$;
3) $5x - 2y = 4$;
4) $3x + 2y = 6$;
5) $x^2 + y^2 = 2{,}25$;
6) $x^2 + y^2 = 6{,}25$;
7) $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 36$;
8) $(x - 4)^2 + (y + 3)^2 = 25$.

500 На координатной плоскости штриховкой показать множество точек, удовлетворяющих неравенству:

1) $x \geqslant -3$;
2) $x \leqslant -2$;
3) $y < 2$;
4) $y > 4$;
5) $y < -2x + 3$;
6) $y > -3x - 1$;
7) $y \geqslant \frac{x}{2} - 2$;
8) $y \leqslant \frac{x}{3} + 2$;
9) $x^2 + y^2 < 9$;
10) $x^2 + y^2 \geqslant 16$;
11) $(x + 0{,}5)^2 + (y - 3)^2 \geqslant 25$;
12) $(x - 4)^2 + (y + 1{,}5)^2 < 4$.

Проверь себя!

1 Найти объединение и пересечение:
1) множеств $A = \{2;\ 1;\ 0;\ 3\}$ и $B = \{-2;\ 0;\ -1;\ 1\}$;
2) отрезков $[-7;\ 2]$ и $[-3;\ 1]$.

2 Сформулировать высказывание $\overline{v}$, если известно высказывание v:
1) $100 > 32$; 2) число 3 является чётным числом.

3 Записать уравнение окружности с центром в точке $C\ (-2;\ 5)$ радиуса $r = 7$.

4 Найти расстояние между точками $A\ (-8;\ 1)$ и $B\ (-6;\ -2)$.

5 На координатной плоскости штриховкой показать множество точек, удовлетворяющих неравенству:
1) $3x - y < 5$; 2) $(x - 4)^2 + (y + 3)^2 \geqslant 4$.

501 Найти объединение и пересечение множеств A и B, если:

1) $A = \{x\colon |x| \leqslant 2,\ x \in \boldsymbol{Z}\}$ и $B = \{x\colon x^2 + x - 6 = 0,\ x \in \boldsymbol{Z}\}$;
2) $A = \{x\colon |x| < 3,\ x \in \boldsymbol{Z}\}$ и $B = \{x\colon x^2 - 2x - 3 = 0,\ x \in \boldsymbol{Z}\}$;
3) $A = \{x\colon x^2 - 5x + 6 \leqslant 0\}$ и $B = \{x\colon |x| \leqslant 2\}$;
4) $A = \{x\colon |x - 2| < 5\}$ и $B = \{x\colon |x - 1| \leqslant 3\}$.

502 Определить, истинным или ложным является высказывание $(\forall x)\ p\ (x)$; $(\exists x)\ p\ (x)$, если предложение $p\ (x)$ следующее:

1) треугольник x — прямоугольный;
2) в треугольнике x все биссектрисы являются и медианами;
3) хорда x некоторой окружности является ее диаметром;
4) сумма внутренних углов треугольника x равна $180°$;
5) сумма внутренних углов четырёхугольника x равна $270°$;
6) чётное число x делится на 4;

7) чётное число x делится на 3;
8) квадратный трёхчлен x не имеет действительных корней.

503 Сформулировать теорему, обратную данной теореме:
1) если числа x и y чётные, то число $x + y$ чётно;
2) если $a > 0$ и $b > 0$, то $ab > 0$;
3) если треугольник x прямоугольный, то сумма его острых углов равна 90°;
4) если отрезок x является средней линией треугольника, то он параллелен одной из сторон этого треугольника.
Установить, истинной или ложной является полученная теорема.

504 Найти середины сторон треугольника ABC, если:
1) $A\ (0;\ 2)$, $B\ (-6;\ 0)$, $C\ (-2;\ -4)$; 2) $A\ (-4;\ 0)$, $B\ (0;\ 6)$, $C\ (2;\ -2)$.

505 Точка M — середина отрезка AB. Найти координаты точки B, если:
1) $M\ (5;\ -7)$, $A\ (-3;\ 1)$; 2) $M\ (-5;\ 3)$, $A\ (9;\ -7)$.

506 На прямой $x = 2$ найти точку, равноудалённую от точек $A\ (3;\ 1)$ и $B\ (-2;\ 2)$.

507 На прямой $y = -3$ найти точку, равноудалённую от точек $M\ (4;\ -3)$ и $N\ (1;\ 3)$.

508 Написать уравнение окружности, описанной около прямоугольного треугольника с гипотенузой AB, если:
1) $A\ (0;\ 6)$, $B\ (-2;\ -4)$; 2) $A\ (-6;\ 2)$, $B\ (4;\ 0)$.

509 Найти координаты центра окружности радиуса 3, лежащего на оси ординат, при условии, что окружность проходит через точку $A\ (-2;\ 3)$.

510 Найти координаты центра окружности радиуса 4, лежащего на оси абсцисс, при условии, что окружность проходит через точку $B\ (4;\ -3)$.

511 Найти координаты точек пересечения окружностей, заданных уравнениями:
1) $x^2 + y^2 = 1$ и $x^2 + y^2 + x + y - 2 = 0$;
2) $x^2 + y^2 = 4$ и $x^2 + y^2 + x + y - 6 = 0$.

512 Составить уравнения прямых, содержащих медианы треугольника ABC, если:
1) $A\ (0;\ 2)$, $B\ (-4;\ 0)$, $C\ (1;\ -1)$;
2) $A\ (5;\ 0)$, $B\ (0;\ -3)$, $C\ (-1;\ 1)$.

513 Найти координаты точек пересечения прямых, заданных уравнениями:
1) $-3x - y = 1$ и $5x + 3y = 5$;
2) $4x + y = -2$ и $3x - 2y = 15$.

514 Определить фигуру, заданную уравнением:

1) $(x-5)^2+(2y+1)^2=0$; 2) $(3x+1)^2+(y-4)^2=0$;

3) $(x+7)(y-6)=0$; 4) $(x-8)(y+9)=0$;

5) $3x^2-4y^2=0$; 6) $9x^2-5y^2=0$.

515 Изобразить множество точек координатной плоскости, удовлетворяющих системе неравенств:

1) $\begin{cases}4x+y\leqslant 2,\\2x-y<3;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}3x-y\geqslant 1,\\2x+y>4;\end{cases}$

3) $\begin{cases}5x-2y>-1,\\-3x+2y\geqslant -2;\end{cases}$ 4) $\begin{cases}-4x+3y<-3,\\3x-2y\leqslant -2;\end{cases}$

5) $\begin{cases}(x+0{,}5)^2+(y-1{,}5)^2>9,\\x-y<2;\end{cases}$ 6) $\begin{cases}(x-2{,}5)^2+(y-0{,}5)^2\geqslant 16,\\x-y>-1;\end{cases}$

7) $\begin{cases}x^2+y^2\geqslant 4,\\x^2+y^2\leqslant 25;\end{cases}$ 8) $\begin{cases}x^2+y^2<16,\\x^2+y^2>9.\end{cases}$

516 Определить фигуру, заданную системой уравнений:

1) $\begin{cases}y=|x|-1,\\x^2+(y+2)^2=4;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}x^2+(y-1)^2=9,\\y=|x|+2;\end{cases}$

3) $\begin{cases}y=(x+1)^2+1,\\(x+1)^2+(y+1)^2=9;\end{cases}$ 4) $\begin{cases}y=(x+1)^2-1,\\(x+1)^2+(y+2)^2=4;\end{cases}$

5) $\begin{cases}(x-1)^2+y^2=4,\\y=\sqrt{x-2};\end{cases}$ 6) $\begin{cases}(x+2)^2+y^2=9,\\y=\sqrt{x+1}.\end{cases}$

Упражнения для повторения курса алгебры IX класса

517 Выполнить деление:

1) $(x^3 - 10x^2 + 26x - 15) : (x - 3)$;
2) $(-x^3 - 5x^2 + x + 14) : (x + 2)$;
3) $(x^4 + 3x^3 - 5x^2 - 5x - 4) : (x + 4)$;
4) $(2x^4 - x^3 + x^2 - x - 5) : (x + 1)$.

518 Решить уравнение:

1) $2x^3 - 9x^2 + 7x + 6 = 0$; 2) $-6x^3 - x^2 + 5x + 2 = 0$.

519 Решить систему уравнений:

1) $\begin{cases} x + y = -1, \\ xy = -72; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 50, \\ xy = -25. \end{cases}$

520 Извлечь корень:

1) $\sqrt[5]{7\frac{19}{32}}$; 2) $\sqrt{5\frac{4}{9}}$;

3) $\sqrt[3]{\frac{8b^6}{343a^9}}$, где $a \neq 0$; 4) $\sqrt[4]{\frac{16x^8}{81y^4}}$, где $y > 0$.

521 Упростить:

1) $(3\sqrt{20} + 7\sqrt{15} - \sqrt{5}) : \sqrt{5}$; 2) $(\sqrt[3]{7} - \sqrt[3]{14} + \sqrt[3]{56}) : \sqrt[3]{7}$;

3) $2\sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{6} - 3\sqrt{\frac{2}{3}}$; 4) $7\sqrt{1\frac{3}{4}} - \sqrt{7} + 0{,}5\sqrt{343}$.

522 Сравнить значения выражений:

1) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{\sqrt{5}}{3}}$ и $\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{\sqrt{5}}{3}}$; 2) $(0{,}3)^{\sqrt{2}}$ и $(0{,}37)^{\sqrt{2}}$.

523 Вынести множитель из-под знака корня:

1) $\sqrt{9a^2b}$, где $a < 0$, $b > 0$;
2) $\sqrt{25a^2b^3}$, где $a > 0$, $b > 0$;
3) $\sqrt{8a^3b^5}$, где $a < 0$, $b < 0$;
4) $\sqrt{121a^3b^3}$, где $a < 0$, $b < 0$.

524 Внести множитель под знак корня:

1) $x\sqrt{5}$, где $x \geqslant 0$; 2) $x\sqrt{3}$, где $x < 0$;
3) $-a\sqrt{3}$, где $a \geqslant 0$; 4) $-a\sqrt{5}$, где $a < 0$.

525 Решить уравнение:

1) $x^{\frac{1}{2}}=2$; 2) $x^{-\frac{1}{2}}=3$; 3) $x^{-3}=8$; 4) $x^{\frac{5}{2}}=0$.

526 Выяснить, принадлежит ли графику функции $y=-\frac{25}{x}$ точка:

1) $A(\sqrt{5}; -5\sqrt{5})$; 2) $B(-5\sqrt{2}; 5\sqrt{2})$.

527 Выяснить, принадлежит ли графику функции $y=\sqrt{1-2x}$ точка:

1) $C\left(\frac{1}{4}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; 2) $D\left(-\frac{1}{2}; 1\right)$.

528 Найти область определения функции:

1) $y=\sqrt{-x^2-3x+10}$; 2) $y=\sqrt[4]{\frac{x-7}{3-2x}}$;
3) $y=\sqrt[3]{\frac{x+4}{6-x}}$; 4) $y=\sqrt[6]{\frac{2x+15}{6}}$;
5) $y=\sqrt[5]{\frac{x}{0,5x+1}}$; 6) $y=\frac{\sqrt{x}}{x^2-4}$.

529 Построить график функции:

1) $y = x^2 + 6x + 10$; 2) $y = -x^2 - 7x - 6$; 3) $y=\frac{4}{x}$;
4) $y=-\frac{6}{x}$; 5) $y=\frac{x^3}{2}$; 6) $y=\frac{1}{4}x^4$.

По графику выяснить, на каких промежутках функция возрастает, убывает; является ли функция чётной или нечётной.

530 Является ли число 107 членом последовательности $a_n = 3n^2$?

531 Последовательность задана рекуррентно. Задать её формулой n-го члена:

1) $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + 1$; 2) $a_1 = 3$, $a_{n+1} = 3a_n$.

532 Последовательность задана рекуррентной формулой $a_{n+1} = (3n + 1) \cdot a_n$. Вычислить первые 4 члена последовательности, если $a_1 = 1$.

533 Вычислить n-й член арифметической прогрессии и сумму n первых членов, если:

1) $a_1 = 10$, $d = 6$, $n = 23$; 2) $a_1 = 42$, $d = \frac{1}{2}$, $n = 12$;

3) $a_1 = 0$, $d = -2$, $n = 7$; 4) $a_1 = \frac{1}{3}$, $d = \frac{2}{3}$, $n = 18$.

534 Найти сумму n первых членов арифметической прогрессии, если $a_1 = 2$, $a_n = 120$ и $n = 20$.

535 Доказать, что последовательность, заданная формулой $a_n = \frac{1-2n}{3}$, является арифметической прогрессией.

536 Для геометрической прогрессии найти:

1) b_4, если $b_1 = 5$ и $q = -10$;

2) b_1, если $b_4 = -5000$ и $q = -10$.

537 Вычислить n-й член геометрической прогрессии и сумму n первых членов, если:

1) $b_1 = 3$, $q = 2$, $n = 5$; 2) $b_1 = 1$, $q = 5$, $n = 4$;

3) $b_1 = 8$, $q = \frac{1}{4}$, $n = 4$; 4) $b_1 = 1$, $q = -3$, $n = 5$.

538 Найти сумму n первых членов геометрической прогрессии, если $b_1 = \frac{1}{4}$, $q = 2$, $n = 6$.

539 Используя микрокалькулятор, вычислить первую космическую скорость у поверхности Луны по формуле $v = \sqrt{aR}$, где ускорение силы тяжести на Луне $a \approx 1{,}623$ м/с^2 и радиус Луны $R \approx 1737$ км.

540 С помощью микрокалькулятора найти длину катета прямоугольного треугольника, если его гипотенуза равна 2,45 м, а другой катет 1,78 м.

541 Делится ли нацело многочлен $M(x)$ на многочлен $P(x)$, если:

1) $M(x) = 3x^5 - 6x^4 + x^3 + x^2 + 3$, $P(x) = x^2 - x - 1$;

2) $M(x) = 2x^5 + 4x^4 + 3x^3 + 2x^2 + 4$, $P(x) = x^2 + x + 1$.

542 Решить уравнение:

1) $x^5 - 9x^4 + 25x^3 - 15x^2 - 26x + 24 = 0$;

2) $x^5 + 3x^4 - 5x^3 - 15x^2 + 4x + 12 = 0$.

543 Решить систему уравнений:

1) $\begin{cases} 3x + 2y - xy = 7, \\ 2x + 3y + xy = 3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 + 2y^2 + 3xy = 28, \\ 2x^2 + y^2 + 3xy = 20. \end{cases}$

544 Упростить выражение:

1) $\dfrac{\sqrt{(a-b)^2}}{a-b}$, где $a > b$; 2) $\dfrac{\sqrt{(a-b)^2}}{a-b}$, где $b > a$;

3) $\dfrac{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}{\sqrt{x^2+x+1}}$, где $x > 0$; 4) $\dfrac{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}{\sqrt{x^2+x+1}}$, где $x < 0$.

545 Какое из равенств верно:

$\sqrt{7-4\sqrt{3}} = 2-\sqrt{3}$ или $\sqrt{7-4\sqrt{3}} = \sqrt{3}-2$?

546 Выяснить, возрастает или убывает функция $y = \dfrac{4}{x^2}$ на промежутке $(0; +\infty)$.

547 Найти область определения функции:

1) $y = \sqrt{(x-2)(x-3)}$; 2) $y = \sqrt{x^2-6x}$;

3) $y = \dfrac{1}{x^2-2\sqrt{2}x+2}$; 4) $y = \dfrac{3}{2\sqrt{3}x-x^2+3}$;

5) $y = \sqrt{\dfrac{(x-1)x}{x+5}}$; 6) $y = \sqrt{\dfrac{x^2-9}{x^2-2x}}$.

548 Построить график функции и по графику установить её основные свойства:

1) $y = \dfrac{3}{x+1}$; 2) $y = \dfrac{1}{2-x}$; 3) $y = \dfrac{x+2}{x}$;

4) $y = \dfrac{3-x}{x}$; 5) $y = \sqrt{x-3}$; 6) $y = \sqrt[3]{2-x}$.

549 Решить уравнение:

1) $\sqrt{x-2} = 4$; 2) $\sqrt{x+3} = 8$;

3) $\sqrt{2x+1} = \sqrt{x-1}$; 4) $\sqrt[4]{x^2+12} = x$;

5) $\sqrt[3]{6x-x^2} = x$; 6) $\sqrt{3-x} = \sqrt{1+3x}$.

550 Турист, поднимаясь в гору, в первый час достиг высоты 800 м, а каждый следующий час поднимался на высоту, на 25 м меньшую, чем в предыдущий. За сколько часов он достигнет высоты 5700 м?

551 В арифметической прогрессии $a_1 + a_5 = \dfrac{5}{3}$, $a_3a_4 = \dfrac{65}{72}$. Найти сумму семнадцати первых членов прогрессии.

552 Найти первые 4 члена геометрической прогрессии, у которой второй член меньше первого на 35, а третий больше четвертого на 560.

553 В геометрической прогрессии $q = 3$, $S_6 = 1820$. Найти b_1 и b_5.

554 Сумма трёх чисел, являющихся последовательными членами арифметической прогрессии, равна 39. Если из первого числа вычесть 4, из второго 5, а из третьего 2, то полученные числа будут тремя последовательными членами геометрической прогрессии. Найти эти числа.

555 С помощью микрокалькулятора по формуле $\frac{1}{R}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}$ найти сопротивление R участка цепи, состоящего из трёх параллельно соединённых сопротивлений $R_1=24$ Ом, $R_2=12$ Ом, $R_3=32$ Ом.

556 Вычислить на микрокалькуляторе с точностью до 0,01 значения функции $y(x)$ при $x=0{,}5;\ 1{,}5;\ 2{,}5;\ 3{,}5$, если:
1) $y(x)=x^3-6x^2+11x-4$;
2) $y(x)=x^4-9x^3+26x^2-24x$;
3) $y(x)=\frac{x^2-4x+13}{x+1}$; 4) $y(x)=\sqrt{9+4x-x^2}$.

Упростить выражение (557—558).

557 1) $\sqrt{5+\sqrt{21}}$; 2) $\sqrt{4+\sqrt{7}}$.

558 1) $\frac{1}{\sqrt{5}}\left(4(a+1)+(\sqrt[3]{a\sqrt{a}}-1)^2-\left(\frac{\sqrt[6]{ab^2}+\sqrt{a}}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}+\sqrt[6]{a}\right)^3\right)^{\frac{1}{2}}$,

где $0<a\leqslant 1$;

2) $\frac{a^{-1}b^{-2}-a^{-2}b^{-1}}{a^{-\frac{5}{3}}b^{-2}-b^{-\frac{5}{3}}a^{-2}}-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}$.

559 Построить график функции:
1) $y=\frac{1}{|x-1|}$; 2) $y=\frac{3}{|x|}-1$; 3) $y=\sqrt[3]{|x|}$; 4) $y=x^2-3|x|-4$.

560 Найти четыре числа, обладающие следующими тремя свойствами:
а) сумма первого и четвёртого чисел равна 11, а сумма второго и третьего равна 2;
б) первое, второе и третье числа являются последовательными членами арифметической прогрессии;
в) второе, третье и четвёртое числа являются последовательными членами геометрической прогрессии.

561 Три числа, сумма которых равна 78, составляют геометрическую прогрессию и являются также первым, третьим и девятым членами арифметической прогрессии. Найти эти числа.

Упражнения для повторения курса алгебры VII—IX классов

1. Числа и алгебраические преобразования

Вычислить **(562—563).**

562 1) $(5{,}4 \cdot 1{,}2 - 3{,}7 : 0{,}8)(3{,}14 + 0{,}86) : 0{,}25$;
2) $(20{,}88 : 18 + 45 : 0{,}36) : (19{,}59 + 11{,}95)$;
3) $\left(5\frac{8}{9} - 3\frac{11}{12}\right) \cdot \frac{18}{71} - 7\frac{5}{6} : 15\frac{2}{3}$; 4) $\frac{7}{36} \cdot 9 + 8 \cdot \frac{11}{32} + \frac{9}{10} \cdot \frac{5}{18}$.

563 1) $\left(3\frac{4}{25} + 20{,}24\right) \cdot 2{,}15 + \left(5{,}1625 - 2\frac{3}{16}\right) \cdot \frac{2}{5}$;

2) $0{,}364 : \frac{7}{25} + \frac{5}{16} : 0{,}125 + 2{,}5 \cdot 0{,}8$;

3) $\dfrac{\left(3{,}25 - \frac{3}{4}\right) \cdot 6{,}25}{(2 - 0{,}75) : \frac{4}{5}} + \dfrac{\left(5{,}5 - 3\frac{3}{4}\right) : 5}{(-2 - 0{,}8) \cdot 1\frac{3}{4}}$;

4) $\dfrac{\left(2\frac{3}{20} + 1\frac{5}{16}\right) : 27{,}7}{\left(1{,}75 \cdot \frac{2}{3} - 1{,}75 \cdot 1\frac{1}{8}\right) : \frac{7}{12}}$.

564 Найти неизвестный член пропорции:
1) $x : 7 = 9 : 3$; 2) $125 : 25 = 35 : x$; 3) $144 : x = 36 : 3$;
4) $9\frac{1}{2} : 14\frac{1}{4} = x : 0{,}75$; 5) $\dfrac{x}{6\frac{5}{6}} = \dfrac{3{,}9}{4{,}1}$; 6) $0{,}3 : x = \frac{4}{9} : 3\frac{1}{3}$.

565 Найти p процентов от числа a, если:
1) $a = 400,\ p = 27$; 2) $a = 2{,}5,\ p = 120$;
3) $a = 2500,\ p = 0{,}2$; 4) $a = 4{,}5,\ p = 2{,}5$.

566 Найти число, если p процентов от него равны b:
1) $p = 23,\ b = 690$; 2) $p = 3{,}2,\ b = 9{,}6$;
3) $p = 125,\ b = 3{,}75$; 4) $p = 0{,}6,\ b = 21{,}6$.

567 Какой процент составляет число a от числа b:
1) $a = 24,\ b = 120$; 2) $a = 4{,}5,\ b = 90$;
3) $a = 650,\ b = 13$; 4) $a = 0{,}08,\ b = 0{,}48$?

568 Выполнить действия:
1) $(-3a^3b)(-2ab^2)(-5a^3b^7)$; 2) $35a^5b^4c : (7ab^3c)$;
3) $(-5ab^4c)^3 \cdot \left(-\frac{1}{5}a^5bc^2\right)^2$;
4) $\left(-\frac{2}{3}a^4b^3c^2\right)^3 : \left(-\frac{1}{3}a^2bc^3\right)^2$.

569 Записать выражение в виде многочлена стандартного вида:
1) $(x - 6)(5 + x) - x^2(x^2 - 5x + 1)$;
2) $(x + 7)(5 - x) - x^2(x^3 + 2x - 1)$;
3) $(b - 3a)^2 + 8\left(a - \frac{1}{2}b\right)\left(a + \frac{1}{2}b\right)$;
4) $(3a + 6)^2 + 4\left(b - \frac{1}{2}a\right)\left(b + \frac{1}{2}a\right)$.

570 Найти числовое значение выражения:
1) $a^3 - ba^2$ при $a = -0{,}6,\ b = 9{,}4$;
2) $ab^2 + b^3$ при $a = 10{,}7,\ b = -0{,}7$;
3) $(m - 5)(2m - 3) - 2m(m - 4)$ при $m = \frac{3}{5}$;
4) $(3a - 2)(a - 4) - 3a(a - 2)$ при $a = \frac{3}{4}$.

571 Выполнить действия:
1) $(-15x^5 + 10x^4 - 25x^3) : (-5x^2) - 3(x - 3)(x^2 + 3x + 9)$;
2) $(9a^2b^3 - 12a^4b^4) : 3a^2b - b^2 \cdot (2 + 3a^2b)$.

Разложить на множители **(572—576)**.

572 1) $1 - \frac{a^2}{4}$; 2) $\frac{b^2}{9} - 1$; 3) $a^2 - b^4$; 4) $b^4 - 9$.

573 1) $1 - a + \frac{a^2}{4}$; 2) $0{,}25b^2 + b + 1$;
3) $49a^2 - 14a + 1$; 4) $1 + 18b + 81b^2$.

574 1) $y^2 - xy - y + x$; 2) $a^2 - ax - x + a$;
3) $3a^2 + 3ab + a + b$; 4) $5a^2 - 5ax - 7a + 7x$.

575 1) $6m^4n + 12m^3n + 3m^2n$; 2) $2a^5b - 4a^4b + 2a^3b$;
3) $a^2 - 2ab + b^2 - y^2$; 4) $a^4 + 2a^2b^2 + b^4 - 4a^2b^2$.

576 1) $x^2 + 3x - 28$; 2) $2x^2 - 12x + 18$;
3) $2x^2 - 5x + 3$; 4) $x^2 + x - 2$.

577 Сократить дробь:

1) $\frac{4-b^2}{4b+2b^2}$; 2) $\frac{b^2-9}{3b^2-9b}$; 3) $\frac{5a^2-10ab}{ab-2b^2}$;

4) $\frac{3xy-21y^2}{4x^2-28xy}$; 5) $\frac{x^2-x-12}{x^2-16}$; 6) $\frac{x^2-x-20}{x^2-25}$;

7) $\frac{3x^2-2x-8}{2x^2-3x-2}$; 8) $\frac{2x^2+x-3}{2x^2+7x+6}$.

Упростить выражение (578—582).

578 1) $\frac{a^5}{6c^3} : \frac{a^2}{4c^3}$; 2) $\frac{9a^2}{m^3} : \frac{6a^2}{m^5}$;

3) $\left(\frac{4a}{b^3}\right)^2 \cdot \frac{b^4}{8a}$; 4) $\left(\frac{3c}{k^2}\right)^3 : \frac{9c}{k^8}$;

5) $\frac{5a}{28b^2} \cdot 8ab \cdot \frac{7b}{5a^3}$; 6) $\left(-\frac{25a^4b^3}{14c^2}\right) \cdot \left(\frac{-21c}{10a^3b^3}\right)$;

7) $\frac{4x(x-1)+1}{4-x^2} : \frac{1-2x}{x-2}$; 8) $\frac{x^2-4(x-1)}{x-1} : \frac{2-x}{1-x^2}$.

579 1) $\frac{a-3}{a+3} - \frac{a^2+27}{a^2-9}$; 2) $\frac{a^2+12}{a^2-4} - \frac{a+3}{a-2}$;

3) $\frac{a+1}{a^2-ax} - \frac{x+1}{a^2-x^2}$; 4) $\frac{3-a}{ab-a^2} - \frac{3-b}{b^2-a^2}$.

580 1) $\frac{4}{a-b} + \frac{9}{a+b} - \frac{8a}{a^2-b^2}$; 2) $\frac{42}{4a^2-9} + \frac{8}{2a+3} + \frac{7}{3-2a}$;

3) $\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} - 2\right)ab$; 4) $\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{ab}\right)ab$.

581 1) $\frac{1}{(x+3)^2} : \frac{x}{x^2-9} - \frac{x-9}{x^2-9}$; 2) $\frac{a+6}{a^2-4} - \frac{1}{a^2-4} \cdot \frac{(a+2)^2}{a}$;

3) $a+b-\frac{a^2}{a-1}$; 4) $\frac{a^2}{a+1} - a + 1$.

582 1) $\frac{b^2}{a^2-2ab} : \left(\frac{2ab}{a^2-4b^2} - \frac{b}{a+2b}\right)$; 2) $\left(\frac{xy}{x^2-y^2} - \frac{y}{2x-2y}\right) : \frac{3y}{x^2-y^2}$;

3) $\left(\frac{2xy}{x^2-9y^2} - \frac{y}{x-3y}\right) : \frac{y^2}{x^2+3xy}$; 4) $\left(\frac{2a+1}{2a-1} - \frac{2a-1}{2a+1}\right) \cdot \frac{10a-5}{4a}$.

583 Упростить выражение и найти его числовое значение:

1) $\frac{a+1}{a-1} + \frac{6}{a^2-1} - \frac{a+3}{a+1}$ при $a = -9$;

2) $\frac{b+5}{b+2} - \frac{3}{b^2-4} - \frac{b+1}{b-2}$ при $b = -8$;

3) $\frac{a-2}{a-3}:\left(\frac{a^2-6a+10}{a^2-9}+\frac{2}{a+3}\right)$ при $a=-1\frac{1}{2}$;

4) $\frac{b+1}{b-4}:\left(\frac{b^2+9}{b^2-16}+\frac{2}{b+4}\right)$ при $b=4\frac{1}{3}$.

584 Вычислить:

1) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}-3^{-2}:3^{-5}$; 2) $(-6)^0\cdot 81^{-2}\cdot 27^3$.

585 Сократить дробь:

1) $\frac{a+\sqrt{3}}{a^2-3}$; 2) $\frac{x-\sqrt{2}}{x^2-2}$; 3) $\frac{y-9y^{\frac{1}{2}}}{y^{\frac{1}{4}}+3}$; 4) $\frac{x+x^{\frac{1}{2}}}{x-1}$.

586 Вычислить:

1) $(6-3\sqrt{5})(6+3\sqrt{5})$; 2) $(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)$;

3) $(3\sqrt{5}-2\sqrt{20})\sqrt{5}$; 4) $(1-\sqrt{3})^2+(1+\sqrt{3})^2$.

587 Упростить выражение:

1) $4\sqrt{3}-\sqrt{3}(\sqrt{16}-\sqrt{3})$; 2) $6\sqrt{2}-\sqrt{2}(\sqrt{2}+\sqrt{36})$;

3) $\sqrt{48}-\sqrt{27}-\frac{1}{2}\sqrt{12}$; 4) $\sqrt{50}-\sqrt{32}-\frac{1}{3}\sqrt{18}$;

5) $(\sqrt{2}+3)^2-3\sqrt{8}$; 6) $(2-\sqrt{3})^2+2\sqrt{12}$.

588 Вычислить:

1) $(\sqrt{4+\sqrt{7}}+\sqrt{4-\sqrt{7}})^2$; 2) $(\sqrt{3-\sqrt{5}}-\sqrt{3+\sqrt{5}})^2$;

3) $\frac{1}{5-\sqrt{5}}-\frac{1}{5+\sqrt{5}}$; 4) $\frac{1}{7+4\sqrt{3}}+\frac{1}{7-4\sqrt{3}}$.

589 Упростить:

1) $\frac{1}{3-\sqrt{2}}+\frac{1}{3+\sqrt{2}}$; 2) $\frac{1}{5-\sqrt{3}}-\frac{1}{5+\sqrt{3}}$;

3) $\frac{3-\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}}-\frac{3+\sqrt{2}}{3-\sqrt{2}}$; 4) $\frac{3}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}-\frac{3}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$.

590 Представить число в стандартном виде:

1) 0,00051; 2) $\frac{1}{500}$; 3) 250 000; 4) $\frac{3}{2500}$.

591 Вычислить:

1) $\frac{(0,25)^5\cdot 8^6}{2^8\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3}$; 2) $\frac{16\cdot 4^{-2}+4\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}}{4+\left(\frac{1}{16}\right)^{-\frac{1}{2}}}$.

592 Вычислить:

1) $\sqrt{8,75^3+8,75^2\cdot 7,25}$; 2) $\frac{0,625\cdot 6,75^2-3,25^2\cdot 0,625}{\sqrt{3,5^2+7\cdot 2,75+2,75^2}}$.

593 Упростить при $x > 0$, $y > 0$:

1) $\sqrt{\frac{4}{81}x^6y^{20}}$; 2) $\sqrt{x^4y^{18}}$;

3) $\sqrt[3]{27x^3y^6}$; 4) $\sqrt[5]{x^5y^{10}}$.

594 Упростить выражение:

1) $\left(\frac{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}}+\frac{2a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}}{a-b}\right)\cdot\frac{a-2a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}+b}{a+b}$;

2) $\left(\frac{1}{a^{\frac{1}{2}}+a}-\frac{a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}+1}\right)\cdot\frac{a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}-1}$; 3) $\frac{x^{\frac{1}{2}}}{1+x^{\frac{1}{2}}}\cdot\left(\frac{x^{\frac{1}{2}}}{1-x^{\frac{1}{2}}}-\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}-x}\right)$;

4) $\frac{m+2m^{\frac{1}{2}}+1}{2m^{\frac{1}{2}}}\cdot\left(\frac{2m^{\frac{1}{2}}}{m^{\frac{1}{2}}-1}-\frac{4m^{\frac{1}{2}}}{m-1}\right)$.

595 Лекарственное растение ромашка при сушке теряет 84% массы. Сколько ромашки должны собрать школьники, если они обязались высушить и сдать 16 кг этого растения?

596 Завод дважды в течение года увеличивал выпуск продукции на одно и то же число процентов. Найти это число, если известно, что в начале года завод выпускал 1200 изделий, а в конце года стал выпускать 1452 изделия.

597 Два сплава состоят из цинка, меди и олова. Известно, что первый сплав содержит 40% олова, а второй — 26% меди. Процентное содержание цинка в обоих сплавах одинаково. Из 300 кг первого сплава и 500 кг второго получен новый сплав, содержащий 30% цинка. Определить, сколько килограммов олова содержится в новом сплаве.

598 Автомобиль «Москвич 2140» в соответствии с паспортными данными расходовал 8,8 л бензина АИ-93 на 100 км пути при скорости 80 км/ч; 1 л бензина стоил 4 р. При движении со скоростями выше рекомендованных расход топлива в среднем повышался на 25%. На сколько дороже обходилась поездка на расстояние 500 км по автостраде при езде с повышенными скоростями?

599 Записать выражение в виде многочлена стандартного вида:

1) $(5a^2+3a-1)(2a^2-4a+2)$; 2) $\left(\frac{2}{3}m^2-\frac{3}{4}n\right)^2$;

3) $(3m^2-6m+7)(-2m^2+5m-1)$; 4) $(a^2b-3b^2)^2$.

№ 5

СКОЛЬКО ВСЕГО ПРАБАБУШЕК И ПРАДЕДУШЕК БЫЛО У ВСЕХ ТВОИХ ПРАБАБУШЕК И ПРАДЕДУШЕК?

Разложить на множители **(600—602)**.

600 1) $4x^8 - 81y^4$; 2) $16a^6 - 25b^8$;

3) $(x+y)^2 - z^2$; 4) $m^2 - (n-k)^2$;

5) $25x^4y^6 - \frac{9}{16}a^6b^6$; 6) $\frac{1}{25}a^6b^2 - \frac{4}{49}c^8$;

7) $(x+y)^2 - 16(x-y)^2$; 8) $(a+b)^2 + 4(a+b) + 4$.

601 1) $4a^{10}b^8 + 4a^5b^4 + 1$; 2) $4a^2 - 12ab^2 + 9b^4$;

3) $16a^4c^6 - 8a^2c^3 + 1$; 4) $25b^4 + 40ab^2 + 16a^2$.

602 1) $8a^3b + 3a^3by + 3a^2bxy + 8a^2bx$;

2) $25x^3 - 15x^2y - 20xy^2 + 12y^3$;

3) $5a^3c + 10a^2 - 6bc - 3abc^2$;

4) $8xy^3 - 24y^2 - 7axy + 21a$.

603 Упростить выражение:

1) $\left(1 - \frac{1}{a+b}\right)\left(1 + \frac{1}{a+b}\right)^{-1}$;

2) $\left(m - \frac{2}{m+n}\right)\left(m + \frac{2}{m+n}\right) + \frac{4}{(m+n)^2}$;

3) $\left(a - b + \frac{4ab}{a-b}\right) : \left(a + b - \frac{4ab}{a+b}\right)$;

4) $\left(a - 2b - \frac{a^2-b^2}{a+b}\right) : \left(2a - b + \frac{a^2-b^2}{a-b}\right)$.

604 Упростить выражение и найти его числовое значение:

1) $\frac{a+2}{a-5} : \left(\frac{a^2+a+19}{a^2-25} + \frac{3}{a+5}\right)$ при $a = -1\frac{1}{2}$;

2) $\frac{a-3}{2+a} : \left(\frac{a^2-3a+3}{4-a^2} + \frac{3}{2+a}\right)$ при $a = \frac{1}{2}$.

605 Вычислить:

1) $(5 \cdot 10^{-2} - 3 \cdot 5^{-1}) : 10^{-2}$;

2) $\dfrac{3 \cdot 2^{-1} - 2 \cdot 3^{-1}}{\left(1\frac{1}{5}\right)^{-1}}$;

3) $\left(1\frac{1}{2}\right)^{-3} : \left(\frac{2}{3}\right)^{5} + \left(1\frac{1}{3}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{-1}$;

4) $\dfrac{\left(3\frac{1}{7}\right)^{-1} + \left(4\frac{2}{5}\right)^{-1}}{11^{-1}}$;

5) $3 \cdot 10^{-1}\left(8^{0} - \frac{1}{8}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{-3} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{4} \cdot \left(\frac{5}{7}\right)^{-1}$;

6) $\dfrac{4^{-1} \cdot 3^{-1} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-2}}{5 - \left(\frac{1}{3}\right)^{-1}}$;

7) $\sqrt{5{,}8^2 - 4{,}2^2}$;

8) $\sqrt{6{,}8^2 - 3{,}2^2}$.

606 Сократить дробь:

1) $\dfrac{a^{-2} - b^{-2}}{a^{-1} - b^{-1}}$;

2) $\dfrac{y^{-1} - x^{-1}}{(x^3 - y^3)(xy)^{-1}}$;

3) $\dfrac{a^2 - b^2}{a^{-1} + b^{-1}}$;

4) $\dfrac{m^{\frac{3}{2}} - m}{m - 1}$.

607 Вычислить:

1) $\sqrt{(\sqrt{3} - 2)^2} - \sqrt{(1 - \sqrt{3})^2} + \sqrt{3}$;

2) $\sqrt{(\sqrt{3} - \sqrt{5})^2} + \sqrt{(1 - \sqrt{3})^2} - \sqrt{5}$;

3) $\sqrt{12(\sqrt{3} - 2)^2} - 4\sqrt{3}$;

4) $\sqrt{\dfrac{(\sqrt{2} - 2)^2}{8}} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

608 Упростить при $x > 0$, $y < 0$:

1) $\frac{3}{5}\sqrt{2{,}25x^{10}y^6}$;

2) $0{,}11\sqrt{\frac{4}{121}x^{12}y^2}$.

609 Упростить выражение и найти его значение:

1) $\dfrac{m^{\frac{1}{2}}n^{\frac{1}{5}} + n^{\frac{1}{3}}}{m + m^{\frac{1}{2}}n^{\frac{2}{15}}}$ при $m = 0{,}04$, $n = 243$;

2) $\dfrac{m^{\frac{1}{2}}n^{-2} - n^{-\frac{3}{2}}}{m^{\frac{3}{4}} - m^{\frac{1}{4}}n^{\frac{1}{2}}}$ при $m = 81$, $n = 0{,}1$;

3) $\left(1+\sqrt{\dfrac{a-x}{a+x}}\right)\cdot\left(1-\sqrt{\dfrac{a-x}{a+x}}\right)$ при $a=5,\ x=4$;

4) $\dfrac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{a-\sqrt{a^2-x^2}}-\dfrac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{a+\sqrt{a^2-x^2}}$ при $a=3,\ x=\sqrt{5}$.

Упростить **(610—611).**

610 1) $6n\cdot\sqrt{\dfrac{m}{2n}}\cdot\sqrt{18mn}$; 2) $\dfrac{a-1}{a^{\frac{3}{4}}+a^{\frac{1}{2}}}\cdot\dfrac{a^{\frac{1}{2}}+a^{\frac{1}{4}}}{a^{\frac{1}{2}}+1}\cdot a^{\frac{1}{4}}$;

3) $\dfrac{m+n}{m+2\sqrt{mn}+n}:\left(\dfrac{\sqrt{m}+\sqrt{n}}{\sqrt{m}-\sqrt{n}}-\dfrac{2\sqrt{mn}}{m-n}\right)$;

4) $\left(\dfrac{4}{4-a}+\dfrac{2-a^{\frac{1}{2}}}{2a^{\frac{1}{2}}+a}\right):\dfrac{16+8a+a^2}{a^{\frac{3}{2}}}$.

611 1) $\left(\dfrac{a\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}-1}+\sqrt{a}\right):\dfrac{a-1}{\sqrt{a}-1}$; 2) $\left(\dfrac{1+b\sqrt{b}}{1+\sqrt{b}}-\sqrt{b}\right)\cdot\dfrac{1+\sqrt{b}}{1-b}$;

3) $\left(\dfrac{1-a}{1-\sqrt{a}}+a\right)\cdot(1-\sqrt{a})$; 4) $\left(m+\dfrac{1-m}{1+\sqrt{m}}\right)\cdot(1+\sqrt{m})$.

2. Уравнения

Решить уравнение **(612—617).**

612 1) $8(3x-7)-3(8-x)=5(2x+1)$;
2) $10(2x-1)-9(x-2)+4(5x+8)=71$;
3) $3+x(5-x)=(2-x)(x+3)$;
4) $7-x(3+x)=(x+2)(5-x)$.

613 1) $\dfrac{5x-7}{6}-\dfrac{x+2}{7}=2$; 2) $\dfrac{4x-8}{3}-\dfrac{3+2x}{5}=8$;

3) $\dfrac{14-x}{4}+\dfrac{3x+1}{5}=3$; 4) $\dfrac{2x-5}{4}-\dfrac{6x+1}{8}=2$.

614 1) $\dfrac{4}{3(x+2)}=\dfrac{9}{8x+11}$; 2) $\dfrac{1}{3(x-1)}=\dfrac{3}{2(x+6)}$;

3) $\dfrac{x}{5-x}+\dfrac{5-x}{5+x}=-2$; 4) $\dfrac{x+3}{x-3}+\dfrac{x}{x+3}=2$.

615 1) $x(x-1)=0$; 2) $(x+2)(x-3)=0$;

3) $x\left(2x-\dfrac{1}{2}\right)(4+3x)=0$; 4) $\dfrac{(x-5)(x+1)}{x^2+1}=0$.

616 1) $x^2+3x=0$; 2) $5x-x^2=0$; 3) $4x+5x^2=0$;
4) $-6x^2-x=0$; 5) $2x^2-32=0$; 6) $2-\dfrac{x^2}{2}=0$;
7) $\left(\dfrac{x}{2}\right)^2-1=0$; 8) $x^2-8=0$.

617 1) $2x^2 + x - 10 = 0$; 2) $2x^2 - x - 3 = 0$;
3) $7x^2 - 13x - 2 = 0$; 4) $4x^2 - 17x - 15 = 0$.

618 Решить уравнение (z — комплексное число):
1) $z^2 + 7z + 13 = 0$; 2) $z^2 - 8z + 18 = 0$;
3) $3z^2 - 2z + 2 = 0$; 4) $5z^2 - 4z + 1 = 0$.

Решить уравнение (619—624).

619 1) $(3x + 4)^2 + 3(x - 2) = 46$;
2) $2(1 - 1{,}5x) + 2(x - 2)^2 = 1$;
3) $(5x - 3)(x + 2) - (x + 4)^2 = 0$;
4) $x(11 - 6x) - 20 + (2x - 5)^2 = 0$.

620 1) $|x| = \frac{1}{2}$; 2) $|x - 1| = 4$;
3) $|3 - x| = 2$; 4) $|3x| - 3x = 6$;
5) $|2{,}5 - x| + 3 = 5$; 6) $|3{,}7 + x| - 2 = 6$.

621 1) $\frac{7}{2x+9} - 6 = 5x$; 2) $\frac{x^2}{x-2} - \frac{x+2}{x-2} = 4$;
3) $\frac{x}{x^2-16} + \frac{x-1}{x+4} = 1$; 4) $\frac{12}{(x+6)^2} + \frac{x}{x+6} = 1$.

622 1) $x^4 - 17x^2 + 16 = 0$; 2) $x^4 - 37x^2 + 36 = 0$;
3) $2x^4 - 5x^2 - 12 = 0$; 4) $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$.

623 1) $\sqrt{x+1} - 5 = 0$; 2) $6 - \sqrt{x+3} = 0$;
3) $\sqrt{5-x} - 1 = x$; 4) $3 + \sqrt{x-5} = x - 4$;
5) $7x - \sqrt{2x+2} = 5x$; 6) $12x - \sqrt{5x-4} = 11x$.

624 1) $x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 5x + 1 = 0$; 2) $x^4 + x^3 - 18x^2 + x + 1 = 0$.

625 Решить графически уравнение:
1) $x^3 = 3x + 2$; 2) $x^3 = -x - 2$; 3) $\frac{5}{x} = 6 - x$;
4) $x^{-1} = 2x - 1$; 5) $\sqrt{x} = \frac{x+3}{4}$; 6) $\sqrt{x} = 6 - x$.

Решить систему уравнений (626—628).

626 1) $\begin{cases} x + y = 12, \\ x - y = 2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x + y = 10, \\ y - x = 4; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 2x + 3y = 11, \\ 2x - y = 7; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 3x + 5y = 21, \\ 6x + 5y = 27; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} 3x + 5y = 4, \\ 2x - y = 7; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 4x - 3y = 1, \\ 3x + y = -9. \end{cases}$

627 1) $\begin{cases} \frac{2x}{3} = \frac{3y}{4} - 2, \\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}y = 5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \frac{1}{2}(x + 11) = \frac{1}{3}(y + 13) + 2, \\ 5x = 3y + 8; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \frac{3}{7}x - \frac{2}{5}y = 2, \\ \frac{3}{4}x + \frac{1}{6}y = 12\frac{1}{6}; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \frac{1}{4}(x + 3y) = \frac{1}{3}(x + 2y), \\ x + 5y = 12. \end{cases}$

628 1) $\begin{cases} x-y=7, \\ xy=18; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x-y=2, \\ xy=15; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x+y=2, \\ xy=-15; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x+y=-5, \\ xy=-36; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x^2+y^2=13, \\ xy=6; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x^2+y^2=41, \\ xy=20. \end{cases}$

Решить уравнение (629—636).

629 1) $\frac{4(7-8x)}{5}+3(4x+1)=\frac{12x+17}{2}$;

2) $2(5x-24)-\frac{x+16}{11}=\frac{7x-2}{4}$;

3) $\frac{2x+3}{5}+\left(7x-\frac{3-x}{2}\right)=\frac{7x+11}{3}+1$;

4) $\frac{6x+5}{2}-\left(2x+\frac{2x+1}{2}\right)=\frac{10x+3}{4}$.

630 1) $2x=1-x\sqrt{3}$; 2) $x\sqrt{5}-12=x$;

3) $x\sqrt{5}+3=x\sqrt{3}+5$; 4) $2x\sqrt{6}-\sqrt{3}=2\sqrt{6}+x\sqrt{3}$.

631 1) $\sqrt{x^2}=1$; 2) $\sqrt{(x-1)^2}=1$;

3) $\sqrt{(x-1)^2}=x-1$; 4) $\sqrt{(x-1)^2}=1-x$.

632 1) $\frac{x+2}{x-2}-\frac{x(x-4)}{x^2-4}=\frac{x-2}{x+2}-\frac{4(3+x)}{4-x^2}$;

2) $1+\frac{2}{x-1}-\frac{6}{x^2-1}=\frac{3}{x+1}$;

3) $\frac{6}{4x^2-1}+\frac{3}{2x+1}=\frac{2}{2x-1}+1$;

4) $\frac{x+1}{x-2}-\frac{x+1}{x-1}=\frac{4}{(x-1)(x-2)}-\frac{x-1}{x-2}$.

633 1) $\frac{x^2}{x+1}-\frac{4x}{x+2}=1-\frac{7x+6}{x^2+3x+2}$;

2) $\frac{2x^2}{x^2-x}+\frac{3x-2}{x^2-1}-\frac{3}{x^3-x}=\frac{2}{x-1}-\frac{2x}{x^2-1}$.

634 1) $\sqrt{3x+4}-\sqrt{x+9}=1$; 2) $\sqrt{21+x}-\sqrt{28-3x}=1$;

3) $\sqrt{5x+3}=\frac{3x+1}{\sqrt{5x-3}}$; 4) $\sqrt{2x-3}=\frac{9}{\sqrt{5x+12}}$;

5) $\sqrt{9-5x}+\frac{4}{\sqrt{3+x}}=2\sqrt{3+x}$;

6) $\frac{2}{\sqrt{3x+1}}+\sqrt{3x+1}=\sqrt{5x+9}$.

635 Решить уравнение относительно x:

1) $x^2 - 5ax - 6a^2 = 0$; 2) $x^2 - 7ax + 10a^2 = 0$;
3) $x^2 - 6ax + 9a^2 - b^2 = 0$; 4) $x^2 - 4ax - b^2 + 4a^2 = 0$.

636 Решить уравнение ($a \neq 0$, $b \neq 0$):

1) $x^2 - ax = 0$; 2) $ax^2 - x = 0$; 3) $ax^2 + bx = 0$;
4) $\frac{x^2}{a} + \frac{x}{b} = 0$; 5) $\frac{ax^2}{b} + x = 0$; 6) $\frac{ax^2}{b} - \frac{x}{a} = 0$.

Решить систему уравнений **(637—638)**.

637 1) $\begin{cases} 2y - 3x = 1, \\ 3x + 5y = 34; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 10x - 3y = 38, \\ 6x + 5y = 50; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 6x - 15y = 12, \\ 4x - 9y = 10; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 14y - 9x = 5, \\ 12x + 21y = 33. \end{cases}$

638 1) $\begin{cases} x^2 - 5y^2 = -1, \\ 3xy + 7y^2 = 1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3y^2 - 2xy = 160, \\ y^2 - 3xy - 2x^2 = 8; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{3}{2}, \\ \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{5}{4}; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{3}, \\ \frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2} = \frac{4}{3}. \end{cases}$

5) $\begin{cases} 2x^2 + y^2 + 5xy = 32, \\ y^2 - xy - 2x^2 = 0; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x^2 - 2y^2 + 4xy = -45, \\ y^2 - xy - 6x^2 = 0; \end{cases}$

7) $\begin{cases} 27x^3 - y^3 = 26, \\ 9x^2 + 3xy + y^2 = 13; \end{cases}$ 8) $\begin{cases} x^3 + 8y^3 = 12xy, \\ x + 2y = 6. \end{cases}$

639 Показать, что система не имеет решений:

1) $\begin{cases} x - y = 3, \\ -2x + 2y = -10; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x - 2y = 7, \\ -9x + 6y = 21. \end{cases}$

3. Неравенства

Решить неравенство **(640—641)**.

640 1) $3x - 7 < 4(x + 2)$;
2) $7 - 6x \geqslant \frac{1}{3}(9x - 1)$;
3) $1{,}5(x - 4) + 2{,}5x < x + 6$;
4) $1{,}4(x + 5) + 1{,}6x > 9 + x$.

641 1) $\frac{x-1}{3} - \frac{x-4}{2} \leqslant 1$; 2) $\frac{x+4}{5} - \frac{x-1}{4} \geqslant 1$;
3) $\frac{x-1}{2} + \frac{x+1}{3} \geqslant 7$; 4) $\frac{2x-5}{4} - \frac{3-2x}{5} < 1$;
5) $x + \frac{x-3}{6} > 3$; 6) $x + \frac{x+2}{4} < 3$.

642 Решить систему неравенств:

1) $\begin{cases} x+5 \geqslant 5x-3, \\ 2x-5<0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x+3 \geqslant 0, \\ x-7<4x-1; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 5x-1 \leqslant 7+x, \\ -0{,}2x>1; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 3x-2 \geqslant 10-x, \\ -0{,}5x<1. \end{cases}$

643 Найти все решения неравенства, являющиеся натуральными числами:

1) $\dfrac{x-2}{6} - x \geqslant \dfrac{x-8}{3}$; 2) $\dfrac{x+5}{2} > \dfrac{x-5}{4} + x$.

644 Найти все целые числа, являющиеся решениями системы неравенств:

1) $\begin{cases} 2(x+1)<8-x, \\ -5x-9<6; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3y+\dfrac{2y-13}{11}>2, \\ \dfrac{y}{6}-\dfrac{3y-20}{9}<-\dfrac{2}{3}(y-7); \end{cases}$

3) $\begin{cases} 3(x-1)>x-7, \\ -4x+7>-5; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \dfrac{y-1}{2}-\dfrac{y-3}{4} \geqslant \dfrac{y-2}{3}-y, \\ 1-y \geqslant \dfrac{1}{2}y-4. \end{cases}$

645 Найти все решения системы неравенств, являющиеся целыми отрицательными числами:

$$\begin{cases} \dfrac{3x-2}{4}+2\dfrac{1}{2}>\dfrac{2x-1}{3}-\dfrac{3x+2}{6}, \\ \dfrac{2x-5}{3}-\dfrac{3x-1}{2}>\dfrac{x-3}{5}-\dfrac{2x-1}{4}. \end{cases}$$

646 Решить квадратное неравенство:

1) $x^2-3x+2>0$; 2) $x^2-2x-3 \leqslant 0$;
3) $x^2-7x+12>0$; 4) $-x^2+3x-1 \geqslant 0$;
5) $3+4x+8x^2<0$; 6) $x-x^2-1 \geqslant 0$;
7) $2x^2-x-1<0$; 8) $3x^2+x-4>0$.

647 Решить неравенство:

1) $|x|>\dfrac{1}{5}$; 2) $|x-1|<2\dfrac{1}{3}$;

3) $|x-1|>3$; 4) $|x-1| \leqslant 2$.

648 Решить методом интервалов неравенство:

1) $(x-1)(x+3)>0$; 2) $(x+4)(x-2)<0$;
3) $(x+1{,}5)(x-2)\,x>0$; 4) $x(x-8)(x-7)>0$;
5) $(x-1)\left(x^2-\dfrac{1}{9}\right) \geqslant 0$; 6) $(x+3)\left(x^2-\dfrac{1}{4}\right) \leqslant 0$.

649 Сравнить числа:

1) $5\sqrt{2}$ и 7; 2) 9 и $4\sqrt{5}$;

3) $10\sqrt{11}$ и $11\sqrt{10}$; 4) $5\sqrt{6}$ и $6\sqrt{5}$;

5) $3\sqrt[3]{3}$ и $2\sqrt[3]{10}$; 6) $2\sqrt[6]{3}$ и $\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{5}$.

650 Найти наибольшее целое отрицательное число, являющееся решением системы неравенств:

$$\begin{cases} \frac{x}{8}-\frac{x}{4}+\frac{x}{2}>x+5, \\ \frac{1}{8}(x+2)<-\frac{1}{7}(x-2). \end{cases}$$

651 Найти наибольшее натуральное число, являющееся решением системы неравенств:

$$\begin{cases} 5x-\frac{3-2x}{2}>\frac{7x-5}{2}+x, \\ \frac{7x-2}{3}-2x<5-\frac{x-2}{4}. \end{cases}$$

Решить неравенство (**652—655**).

652 1) $\left|\frac{x}{2}+3\right|>2{,}5$; 2) $|3x-2|\geqslant 10$;

3) $|5x-3|<7$; 4) $|2+5x|\leqslant 0$.

653 1) $\sqrt{x^2}<1$; 2) $\sqrt{x^2}>1$;

3) $\sqrt{(x-1)^2}<1$; 4) $\sqrt{(x-1)^2}>1$.

654 1) $x^5>-32$; 2) $x^7<128$; 3) $x^4>81$;

4) $x^6<64$; 5) $x^{-3}>27$; 6) $x^{-5}<-1$;

7) $x^{-8}>1$; 8) $x^{-10}<1$.

655 1) $\frac{(x+3)(x-7)}{2-x}>0$; 2) $\frac{(x+1)(4-x)}{x+5}<0$;

3) $\frac{x^2-x-12}{x+5}\geqslant 0$; 4) $\frac{x^2-7x+12}{x-1}<0$;

5) $\frac{(x-1)(x+2)(x-3)}{(x-4)(x+5)}<0$; 6) $\frac{(x+7)(x-3)}{(8-x)(x+6)(x-1)}<0$.

656 Доказать неравенство:

1) $a^2-ab+b^2\geqslant ab$; 2) $1+\frac{b}{2}\geqslant\sqrt{2b}$, если $b\geqslant 0$;

3) $a^2+a^{-2}\geqslant 2$, если $a\neq 0$; 4) $a^3+a^{-3}\geqslant 2$, если $a>0$.

4. Задачи на составление уравнений

657 Сумма двух чисел равна 120, а их разность равна 5. Найти эти числа.

658 На путь по течению реки катер затратил 3 ч, а на обратный путь 4,5 ч. Какова скорость течения реки, если скорость катера относительно воды 25 км/ч?

659 Моторная лодка прошла путь от A до B по течению реки за 2,4 ч, а обратный путь за 4 ч. Найти скорость течения реки, если известно, что скорость лодки относительно воды 16 км/ч.

660 Катер проплыл 15 км вниз по течению реки за 1 ч и вернулся на ту же пристань, потратив на обратный путь 1,5 ч. Найти скорость катера относительно воды и скорость течения реки.

661 Периметр равнобедренного треугольника равен 5,4 дм. Боковая сторона в 13 раз длиннее основания. Найти длины сторон треугольника.

662 Скорость рейсового трамвая новой конструкции на 5 км/ч больше, чем скорость прежнего трамвая, поэтому он проходит маршрут в 20 км на 12 мин быстрее, чем трамвай старой конструкции. За какое время новый трамвай проходит этот маршрут?

663 Некоторую часть дня автобус работает в режиме экспресса. При этом его рейсовая скорость увеличивается на 8 км/ч, а время, затраченное на маршрут в 16 км, сокращается на 4 мин. За какое время проходит этот маршрут автобус в режиме экспресса?

664 Одно звено собрало со своего участка 875 ц пшеницы, а другое звено с участка, меньшего на 2 га, — 920 ц пшеницы. Сколько центнеров пшеницы собрало каждое звено с 1 га, если известно, что с 1 га во втором звене собрали на 5 ц пшеницы больше, чем в первом?

665 При одновременной работе двух насосов пруд был очищен за 2 ч 55 мин. За сколько времени мог бы очистить пруд каждый насос, работая отдельно, если один из них может эту работу выполнить на 2 ч быстрее другого?

666 Отец старше дочери в 4 раза. Пять лет назад он был старше её в 9 раз. Сколько лет сейчас отцу и дочери?

667 Поезд, отходя от станции, равномерно увеличивает скорость движения и за 25 мин достигает скорости 60 км/ч. Найти ускорение поезда.

668 Поезд, отходя от станции, равномерно увеличивает скорость и за 10 мин достигает 30 км/ч. Какое расстояние пройдёт поезд за это время?

669 Тело брошено с начальной скоростью $v_0 = 3$ м/с вертикально вниз и движется равноускоренно с ускорением $g = 9{,}8$ м/с^2. Найти время, за которое тело пройдёт расстояние $s = 137{,}5$ м.

670 Пешеход и велосипедист отправились одновременно навстречу друг другу из разных городов, расстояние между которыми 40 км. Велосипедист проехал мимо пешехода через 2 ч после отправления и на весь путь затратил на 7,5 ч меньше, чем пешеход. Найти скорость движения каждого, считая, что пешеход и велосипедист двигались всё время с постоянными скоростями.

671 Водитель междугородного автобуса вынужден был по дороге заправить автобус горючим, затратив на это 12 мин. Чтобы прибыть в конечный пункт вовремя, он увеличил скорость автобуса на 15 км/ч и ликвидировал опоздание на перегоне в 60 км. С какой скоростью двигался автобус на этом перегоне?

672 Поезд прошёл мимо неподвижно стоящего на платформе человека за 6 с, а мимо платформы длиной 150 м за 15 с. Найти скорость движения поезда и его длину.

5. Функции и графики

673 Выяснить, принадлежит ли точка A графику данной функции; найти координаты точек пересечения графика этой функции с осями координат и значение функции при $x = -2$:

1) $y = 3 - 0{,}5x$, $A\,(4;\ 1)$;
2) $y = \frac{1}{2}x - 4$, $A\,(6;\ -1)$;
3) $y = 2{,}5x - 5$, $A\,(1{,}5;\ -1{,}25)$;
4) $y = -1{,}5x + 6$, $A\,(4{,}5;\ -0{,}5)$.

674 Построить графики функций (в одной координатной плоскости):

1) $y = 3x$, $y = -3x$;
2) $y = \frac{1}{3}x$, $y = -\frac{1}{3}x$;
3) $y = x - 2$, $y = x + 2$;
4) $y = -x - 2$, $y = 2 - x$.

675 Построить график функции:

1) $y = x^2 + 2\frac{1}{4}$;   2) $y = \left(x - \frac{1}{3}\right)^2$;

3) $y = (x + 2{,}5)^2 - \frac{1}{4}$;   4) $y = x^2 - 4x + 5$;

5) $y = x^2 + 2x - 3$;   6) $y = -x^2 - 3x + 4$.

676 Найти координаты вершины параболы:

1) $y = x^2 - 8x + 16$;   2) $y = x^2 - 10x + 15$;

3) $y = x^2 + 4x - 3$;   4) $y = 2x^2 - 5x + 3$.

677 Найти наибольшее или наименьшее значение функции:

1) $y = x^2 - 7x - 10$;   2) $y = -x^2 + 8x + 7$;

3) $y = x^2 - x - 6$;   4) $y = 4 - 3x - x^2$.

678 Построить в одной координатной плоскости графики двух данных функций и определить, при каких значениях аргумента равны значения этих функций:

1) $y = x^2 - 4$ и $y = 3x$;

2) $y = (x + 3)^2 + 1$ и $y = -x$;

3) $y = (x + 1)(x + 3)$ и $y = -x - 3$;

4) $y = x^3 + 1$ и $y = x + 1$.

679 Построить эскиз графика и перечислить свойства функции:

1) $y = x^4$;   2) $y = x^5$;   3) $y = \frac{1}{x^3}$;   4) $y = \frac{1}{x^4}$.

680 Сравнить значения выражений:

1) $\sqrt[4]{5{,}3}$ и $\sqrt[4]{5\frac{1}{3}}$;   2) $\sqrt[5]{-\frac{2}{9}}$ и $\sqrt[5]{-\frac{1}{7}}$.

681 Построить график функции и найти значения x, при которых $y = 0$, $y > 0$, $y < 0$:

1) $y = 2x^2 - 3$;   2) $y = -2x^2 + 1$;

3) $y = 2(x - 1)^2$;   4) $y = 2(x + 2)^2$;

5) $y = 2(x - 3)^2 + 1$;   6) $y = -3(x - 1)^2 + 5$;

7) $y = x^2 + 2x - 8$;   8) $y = x^2 - 4x + 3$.

682 Найти значения коэффициентов a и b квадратичной функции

$$y = ax^2 + bx - 5,$$

если $y(-1) = 0$ и $y(1) = 6$.

683 Найти значения коэффициентов a, b и c, если известно, что график функции

$$y = ax^2 + bx + c$$

проходит через точки $(-1; 1)$, $(1; 0)$ и $(4; 3)$.

Построить график функции **(684—687)**.

684 1) $y=\frac{1}{x}-2$; 2) $y=3+\frac{1}{x^2}$;

3) $y=\frac{4}{x}-1$; 4) $y=-\frac{3}{2x}+2$.

685 1) $y=\sqrt{x-4}$; 2) $y=-\sqrt{x}+1{,}5$;

3) $y=\sqrt[3]{x+3}$; 4) $y=-\sqrt[3]{x}+1$.

686 1) $y=|x-1|$; 2) $y=|-1+2x|$;

3) $y=|4-x^2|$; 4) $y=x^2-3|x|$.

687 1) $y=\begin{cases}\frac{6}{x}, \text{ если } x\geqslant 1,\\ 6x, \text{ если } x<1;\end{cases}$ 2) $y=\begin{cases}2, \text{ если } x\geqslant -1,\\ \frac{2}{x^2}, \text{ если } x<-1.\end{cases}$

688 Выяснить, является ли функция чётной или нечётной:

1) $y=2x^4-|x|$; 2) $y=x^3+x^2$;

3) $y=\sqrt[3]{x-1}$; 4) $y=\frac{x^3+x}{3}$.

6. Прогрессии

689 Числовая последовательность задана формулой n-го члена $a_n=n(n+1)$. Является ли членом этой последовательности число: 1) 20; 2) 30; 3) 40?

690 Последовательность задана условием $a_1=-1$ и рекуррентной формулой $a_{n+1}=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}\cdot a_n\right)$. Вычислить следующие члены последовательности:

1) a_2; 2) a_3; 3) a_5; 4) a_{10}; 5) a_n.

691 Найти разность арифметической прогрессии, если $a_1=7$, $a_7=-5$.

692 Найти первый член арифметической прогрессии, если $a_{10}=4$, $d=0{,}5$.

693 Вычислить первый член и сумму n первых членов арифметической прогрессии, если:

1) $a_n=459$, $d=10$, $n=45$; 2) $a_n=121$, $d=-5$, $n=17$.

694 Найти номер n, если в арифметической прогрессии $a_1=-2$, $a_5=-6$, $a_n=-40$.

695 Найти сумму десяти первых членов последовательности, заданной рекуррентной формулой $b_{n+1}=-\frac{b_n}{2}$ и условием $b_1=1024$.

696 В геометрической прогрессии найти:

1) n, если $b_1 = 5$, $q = -10$ и $b_n = -5000$;
2) q, если $b_3 = 16$ и $b_6 = 2$;
3) b_1, если $b_3 = 16$ и $b_6 = 2$;
4) b_7, если $b_3 = 16$ и $b_5 = 1$.

697 Найти сумму чисел $3 + 6 + 12 + \ldots + 96$, если её слагаемые являются последовательными членами геометрической прогрессии.

698 Вычислить первый член и разность арифметической прогрессии, если:

1) $a_8 = 25$, $a_{10} = -3$;
2) $a_4 = 10$, $a_7 = 19$;
3) $a_3 + a_7 = 4$, $a_2 + a_{14} = -8$;
4) $a_2 + a_4 = 16$, $a_1a_5 = 28$;
5) $S_{20} = 110$, $a_{15} - a_5 = \frac{8}{3}$;
6) $a_1 + a_2 + a_3 = 15$, $a_1a_2a_3 = 80$.

699 Найти десятый член арифметической прогрессии, если:

1) $a_9 = -5$ и $a_{11} = 7$;
2) $a_9 + a_{11} = -10$;
3) $a_9 + a_{10} + a_{11} = 12$.

700 Найти первый член и разность арифметической прогрессии, у которой $S_7 = -35$ и $S_{42} = -1680$.

701 Является ли геометрической прогрессией последовательность, заданная формулой n-го члена:

1) $b_n = -3^{2n}$;
2) $b_n = 2^{3n}$;
3) $b_n = \frac{3}{2n}$;
4) $b_n = \frac{(-1)^n}{2^n}$?

702 Вычислить знаменатель геометрической прогрессии, если:

1) $b_1 = 12$, $S_3 = 372$;
2) $b_1 = 1$, $S_3 = 157$;
3) $b_3 = 300$, $S_3 = 372$;
4) $b_1 = 144$, $S_3 = 157$.

703 Найти первый член, знаменатель и формулу n-го члена геометрической прогрессии, если $b_2 = -\frac{1}{2}$ и $b_4 = -\frac{1}{72}$.

704 Найти четвёртый член и знаменатель геометрической прогрессии, если $b_3 = -6$ и $b_5 = -24$.

705 Между числами $\frac{1}{3}$ и 27 найти такие три числа, чтобы получилось пять последовательных членов геометрической прогрессии.

706 В геометрической прогрессии найти:

1) b_1 и b_5, если $q = 3$, $S_5 = 484$;
2) b_1 и q, если $b_3 = 0{,}024$, $S_3 = 0{,}504$.

707 Вычислить первый член и знаменатель геометрической прогрессии, если:

1) $b_1 + b_2 = 20$, $b_2 + b_3 = 60$; 2) $b_1 + b_2 = 60$, $b_1 + b_3 = 51$.

708 В геометрической прогрессии найти:

1) S_5, если $b_4 = 88$, $q = 2$;
2) S_5, если $b_1 = 11$, $b_4 = 88$;
3) b_1, если $S_5 = 341$, $q = 2$;
4) S_5, если $b_3 = 44$, $b_5 = 176$.

709 Сумма чисел x, y, z равна 25. Числа x, $2y$, z являются последовательными членами арифметической прогрессии, а числа x, $y + 1$, z — последовательными членами геометрической прогрессии. Найти x, y, z.

710 При каком значении x числа x, $\sqrt{4-3x}$, $3 - 2x$ являются последовательными членами геометрической прогрессии?

711 На международном шахматном турнире в Будапеште в 1896 г. первое место занял знаменитый русский шахматист М. И. Чигорин. Участники турнира играли друг с другом один раз. Всего было сыграно 78 партий. Сколько шахматистов участвовало в этом турнире?

ИТОГОВОЕ ПОВТОРЕНИЕ

Вариант 1

712 Выполнить действия:

$$\frac{1-a}{1-a+a^2}-\frac{2}{1+a}+\frac{-3-7a+2a^2}{a^3+1}.$$

713 Решить уравнение

$$\sqrt{x+3}+5=7x.$$

714 Вычислить

$$\sqrt{20}-\left(\sqrt{\sqrt{5}+1}-\sqrt{\sqrt{5}-1}\right)^2.$$

715 График функции $y=-3x+m$ проходит через точку $(-1;\ 2)$. Определить значение m. Построить график и указать, при каких значениях x функция принимает отрицательные значения.

716 Решить систему уравнений $\begin{cases}2x+6y=18,\\3x-5y=-29.\end{cases}$

Вариант 2

717 Вычислить

$$\frac{3\cdot\left(0{,}5:1{,}25+\frac{7}{5}:1\frac{4}{7}-\frac{3}{11}\right)}{\left(1{,}5+\frac{1}{4}\right):18\frac{1}{3}}.$$

718 Решить уравнение

$$\frac{3}{x-1}-\frac{4x-1}{x+1}=\frac{x^2+5}{x^2-1}-5.$$

719 Решить неравенство

$$3x^2-7x+4<0.$$

720 Построить график функции $y=\frac{1}{2}\sqrt{x}$ и найти приближённо по графику $y(7)$.

721 Решить неравенство $|3x-7|>10$.

Вариант 3

722 Вычислить

$$\left(\frac{3{,}75+2\frac{1}{2}}{2\frac{1}{3}-1{,}875}-\frac{2{,}75-1\frac{1}{2}}{8\frac{1}{8}+1{,}5}\right):\frac{10}{11}.$$

723 Сократить дробь

$$\frac{x^2+2x-15}{x^2-9}.$$

724 Решить систему уравнений

$$\begin{cases}\dfrac{1+x}{5}-\dfrac{2x-y}{2}=3y-1,\\ \dfrac{5y-2}{2}-\dfrac{4x-5}{6}=8-2x.\end{cases}$$

725 Построить график функции $y=-\frac{2}{x}$ и указать промежутки, на которых эта функция возрастает.

726 Найти сумму первых 15 членов арифметической прогрессии, у которой первый член равен –20, а разность равна 12.

Вариант 4

727 Решить уравнение

$$\sqrt{3x-4}\cdot\sqrt{x-2}=4.$$

728 Решить неравенство

$$\frac{7x-2}{3}+5x\leqslant\frac{11x-5}{2}.$$

729 Упростить выражение

$$\left(\frac{a+b}{a-b}+\frac{a-b}{a+b}-\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}\right)\cdot\frac{2a^2-2b^2}{a^2+b^2}.$$

730 Найти пятый член геометрической прогрессии

$$b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_n,\ \ldots,$$

если $b_2-b_1=18$, $b_3-b_1=42$.

731 Решить уравнение $x^4=6-x^2$.

Вариант 5

732 Вычислить

$$\left(7\sqrt{\frac{5}{7}}-5\sqrt{\frac{7}{5}}\right)^2.$$

733 Решить уравнение

$$\frac{3x-2}{2x+5}=\frac{x+4}{x-10}.$$

734 Из двух городов, находящихся на расстоянии 700 км, отправились одновременно навстречу друг другу два поезда. Скорость движения одного из них на 20 км/ч больше скорости другого. Найти скорость движения каждого поезда, если известно, что они двигались без остановок и встретились через 5 ч после начала движения.

735 Решить уравнение

$$\sqrt{3x^2-2}=x.$$

736 Указать, в каком квадранте расположена вершина параболы $y = x^2 + 7x + 10$.

Вариант 6

737 Решить систему неравенств

$$\begin{cases}\dfrac{x-3}{5}+2>\dfrac{x-1}{10}-1,\\ x-3>\dfrac{x-4}{3}.\end{cases}$$

738 Упростить выражение

$$\left(\frac{ax-b}{a+b}-\frac{bx+a}{b-a}\right)\cdot\left(\frac{a^2-b^2}{x^2-1}:\frac{a^2+b^2}{x-1}\right).$$

739 Вычислить

$$(\sqrt{20}-\sqrt{45}+2\sqrt{80}+3\sqrt{125})\cdot\sqrt{5}.$$

740 Построить график функции $y = -x^2 - 8x + 12$ и определить, на каком промежутке эта функция возрастает.

741 Решить уравнение

$$(x-2)^2+5(16-3x)=0.$$

Вариант 7

742 Разложить многочлен

$$5y^2 - 10y - yz + 2z$$

на множители.

743 Выполнить действия:

$$\left(a + \frac{b^2}{a-b}\right)\left(1 - \frac{b^3}{a^3+b^3}\right)(a+b).$$

744 Решить уравнение

$$\frac{x+1}{x-1} + \frac{x-1}{x+1} = \frac{5}{2}.$$

745 Найти наибольшее значение функции

$$y = -2x^2 + 5x - 3.$$

746 Вычислить

$$\sqrt[5]{(0{,}00032)^{-2}}.$$

Вариант 8

747 Найти значение выражения

$$\left(1 + x + \frac{1}{1-x}\right) : \left(1 + \frac{1}{1-x^2}\right)$$

при $x = -\frac{4}{5}$.

748 Найти область определения функции

$$y = \sqrt{\frac{x-3}{2x-1}}.$$

749 Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x + 3y = 4, \\ 0{,}5x + y = 1{,}5. \end{cases}$$

750 Найти p и q, если известно, что вершина параболы

$$y = x^2 + px + q$$

имеет координаты (–1; 2). Построить график этой функции.

751 Вычислить

$$(1+\sqrt{7})(4-\sqrt{7})\cdot 3\sqrt{7} + 9\sqrt{7}.$$

Вариант 9

752 Решить систему уравнений $\begin{cases} \dfrac{x+y}{2} - \dfrac{x-y}{3} = \dfrac{7}{6}, \\ \dfrac{x-y}{4} + \dfrac{x+y}{3} = \dfrac{5}{4}. \end{cases}$

753 Сократить дробь $\dfrac{2a^2+5a-3}{a^2+a-6}$.

754 Найти p и q, если парабола $y = x^2 + px + q$ пересекает ось абсцисс в точке $x = 2$, а ось ординат в точке $y = -2$. Определить координаты вершины параболы и выяснить, при каких значениях x парабола расположена ниже оси абсцисс.

755 В геометрической прогрессии сумма первого и второго членов равна 6, а разность между первым и третьим членами равна 3. Найти сумму первых шести членов прогрессии.

Вариант 10

756 Найти целые решения системы неравенств

$$\begin{cases} \dfrac{2x-3}{4} + \dfrac{3x-2}{3} > \dfrac{1}{12}, \\ \dfrac{5x+1}{2} - \dfrac{8x-1}{5} < 5. \end{cases}$$

757 Выяснить, проходит ли прямая $y = 3x - 2$ через точку пересечения прямых $y = 2x - 1$ и $y = 4 - 3x$.

758 Сократить дробь $\dfrac{2a^2-3a-2}{a^2+3a-10}$.

759 Из города A выехал автомобиль, и одновременно навстречу ему из города B выехал автобус. Двигаясь без остановки и с постоянными скоростями, они встретились через 1 ч 12 мин после начала движения. Найти скорости автомобиля и автобуса, если автомобиль прибыл в город B на 1 ч раньше, чем автобус в город A, а расстояние между городами A и B равно 120 км.

760 В арифметической прогрессии сумма первого и шестого членов равна 11, а сумма второго и четвёртого членов равна 10. Найти сумму первых шести членов этой прогрессии.

Задачи для внеклассной работы

761 Доказать, что если натуральное число не делится на 3, то остаток от деления квадрата этого числа на 3 равен 1.

762 Доказать, что при любом натуральном n число $3n + 2$ не является квадратом целого числа.

763 Доказать, что:
1) число $10^{70} - 361$ делится на 27;
2) число $10^{80} - 298$ делится на 99;
3) число $91^{50} - 19^{75}$ делится на 18;
4) число $(75 \cdot 94)^{26} + (39 \cdot 56)^{25}$ делится на 19.

764 Доказать, что если сумма цифр натурального числа не меняется при умножении его на 5, то это число делится на 9.

765 Пусть m, n — натуральные числа, и пусть число $m - 1$ делится на 3^n. Доказать, что число $m^3 - 1$ делится на 3^{n+1}.

766 Доказать, что не существует целых чисел x, y, для которых справедливо равенство $x^2 - y^2 = 1982$.

767 Пусть m и n — взаимно простые натуральные числа. Доказать, что не существует натуральных чисел x и y, удовлетворяющих уравнению $mx + ny = mn$.

768 Доказать, что число $7n^2 + 1$ не делится на 3 ни при каком натуральном n.

769 Доказать, что не существует целых чисел x и y, удовлетворяющих уравнению $15x^2 = 9 + 7y^2$.

770 Доказать, что если m, n, k — натуральные числа и число $m + n + k$ делится на 6, то число $m^3 + n^3 + k^3$ также делится на 6.

771 Доказать, что если натуральные числа m и n не делятся на 5, то число $m^4 - n^4$ делится на 5.

772 Доказать, что для любых целых чисел m и n число $m^6n^2 - n^6m^2$ делится на 30.

773 Доказать, что дробь $\frac{(n+1)^4 + n^4 - 1}{2}$, где n — натуральное число, можно представить в виде произведения двух натуральных чисел, разность которых равна двум.

774 Доказать, что ни при каких натуральных числах m и n не может быть верным равенство:

1) $m(m+1) = n(n+2)$; 2) $m^2 + (m+1)^2 = n^4 + (n+1)^4$.

775 Доказать, что ни при каком натуральном числе n сумма $n^3 + 6n^2 + 15n + 15$ не делится на $n + 2$.

776 Найти все натуральные числа n, при которых число $n^4 + n^2 + 1$ является простым.

777 Найти все пары целых чисел x, y, удовлетворяющих уравнению $x^2 = y^2 + 2y + 13$.

778 Найти четыре последовательных натуральных числа, произведение которых равно 5040.

779 Пусть m, n, p, q — натуральные числа, и пусть значение многочлена $mx^3 + nx^2 + px + q$ при любом целом x есть число, делящееся на 5. Доказать, что каждое из чисел m, n, p, q делится на 5.

780 Доказать, что если a, b, c — натуральные числа, то дискриминант $D = b^2 - 4ac$ квадратного трёхчлена $ax^2 + bx + c$ не может принимать значение, равное 63.

781 Доказать равенство:

1) $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$;

2) $\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)$.

782 Доказать, что если a, b, c — попарно различные числа, то при любых значениях x выполняется равенство:

1) $\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + \frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)} + \frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} = 1$;

2) $a^2 \cdot \frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + b^2 \cdot \frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)} + c^2 \cdot \frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} = x^2$.

783 Упростить выражение:

1) $\dfrac{2+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}+\sqrt{8}+4}$; 2) $\dfrac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}+\dfrac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}}$;

3) $\dfrac{\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}}{\sqrt{x^2-4(x-1)}}$, если $1<x<2$;

4) $\left(\dfrac{a+b}{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{b^2}}+\dfrac{\sqrt[3]{ab^2}-\sqrt[3]{a^2b}}{\sqrt[3]{a^2}-2\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}\right):(\sqrt[6]{a}-\sqrt[6]{b})-\sqrt[6]{b}$.

784 Решить уравнение:

1) $\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{48}{x^2}=10\left(\dfrac{x}{3}-\dfrac{4}{x}\right)$;

2) $6x^4-35x^3+62x^2-35x+6=0$;

3) $\sqrt{x-2+\sqrt{2x-5}}+\sqrt{x+2+3\sqrt{2x-5}}=7\sqrt{2}$;

4) $2\sqrt{x^2-2x+4}-\sqrt{x^2-2x+9}=1$.

785 Найти действительные корни уравнения:

1) $x(x+1)(x+2)(x+3)=24$;

2) $x^3+(x+1)^3+(x+2)^3=(x+3)^3$.

786 Найти действительные решения системы уравнений:

1) $\begin{cases}(x^2+y^2)(x-y)=13,\\ xy(x-y)=6;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}4(x^3+y^3)=9x^2y^2,\\ 4(x^2+y^2)=9x^2y^2-8xy.\end{cases}$

787 Решить систему уравнений:

1) $\begin{cases}x^3-y^3=61(x-y),\\ (x+1)(y+1)=12;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}\dfrac{x^2}{y}+\dfrac{y^2}{x}=12,\\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{3};\end{cases}$

3) $\begin{cases}2x^2y^2-3y^2+5xy-6=0,\\ 3x^2y^2-4y^2+3xy-2=0;\end{cases}$ 4) $\begin{cases}\dfrac{xy}{x+2y}+\dfrac{x+2y}{xy}=2,\\ \dfrac{xy}{x-2y}+\dfrac{x-2y}{xy}=4;\end{cases}$

5) $\begin{cases}x^3y+xy^3=\dfrac{10}{9}(x+y)^2,\\ x^4y+xy^4=\dfrac{2}{3}(x+y)^3;\end{cases}$ 6) $\begin{cases}\dfrac{x(y^2+1)}{x^2+y^2}=\dfrac{3}{5},\\ \dfrac{y(x^2-1)}{x^2+y^2}=\dfrac{4}{5}.\end{cases}$

788 Доказать, что система уравнений $\begin{cases} x+y+z=0, \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=0 \end{cases}$

не имеет действительных решений.

789 Решить систему уравнений:

1) $\begin{cases} |x-1|+|y-5|=1, \\ y=5+|x-1|; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \sqrt{5y-x}+x=3, \\ \sqrt{2y-x}+x+y=3; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \sqrt{y+7x}+\sqrt{y+2x}=5, \\ \sqrt{y+2x}-y+x=1; \end{cases}$

4) $\begin{cases} \sqrt{25-x^2}-\sqrt{25-y^2}=\sqrt{8}, \\ \sqrt{25-x^2}+\sqrt{25-y^2}=\sqrt{16+(x+y)^2}. \end{cases}$

790 Найти все действительные значения r, при которых уравнение $x^2+(4+2r)x+5+4r=0$ имеет:

1) действительные и равные корни;

2) действительные корни, равные по модулю, но противоположные по знаку.

791 Найти все действительные значения a, при которых корни уравнения $ax^2+2(a+3)x+a+2=0$ неотрицательны.

792 Найти все значения a, при которых уравнение x^2+ax+ $+a=0$ имеет действительные корни x_1 и x_2, удовлетворяющие условиям $x_1<x_2$, $x_1^2x_2=a^2$.

793 Найти все значения a, при которых квадратичная функция $y=x^2+ax+a^2+6a$ принимает отрицательные значения при всех x, таких, что $1<x<2$.

794 Доказать, что если действительные числа a, b, c удовлетворяют условию $c(a+b+c)\leqslant 0$, то уравнение $ax^2+bx+c=0$ имеет действительные корни.

795 Пусть x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2+px+q=0$. Найти p и q, если известно, что числа x_1+1 и x_2+1 являются корнями уравнения $x^2-p^2x+pq=0$.

796 Найти все значения r, при которых неравенство

$$-3<\frac{x^2+rx-2}{x^2-x+1}<2$$

выполняется при всех значениях x.

797 Найти все значения a, для которых при всех действительных значениях x выполняется неравенство

$$ax^2+2(a+2)x+2a+4<0.$$

798 Доказать, что для любых чисел x и y справедливо неравенство:

1) $x^2 + 4y^2 - 2x - 16y + 17 \geqslant 0$;
2) $5x^2 - 4xy + y^2 - 16x + 6y + 13 \geqslant 0$.

799 Доказать, что для любых чисел a, b, c справедливо неравенство:

1) $a^2 + b^2 + c^2 - 2a + 4b - 6c + 14 \geqslant 0$;
2) $(a + b + c)^2 \geqslant 3\,(ab + bc + ca)$;
3) $(a + b - c)^2 + (b + c - a)^2 + (a + c - b)^2 \geqslant ab + bc + ca$.

800 Доказать, что при любом натуральном числе $n > 2$ справедливо неравенство:

1) $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2}$; 2) $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}$.

801 Доказать, что для любых неотрицательных чисел a, b, c справедливо неравенство:

1) $a^3 + b^3 + c^3 \geqslant 3abc$;
2) $(a + b + c)(ab + bc + ca) \geqslant 9abc$;
3) $(a + b)(b + c)(c + a) \geqslant 8abc$;
4) $(a + b - c)(b + c - a)(c + a - b) \leqslant abc$.

802 Доказать, что для любых положительных чисел a, b, c справедливо неравенство:

1) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geqslant \frac{1}{\sqrt{bc}} + \frac{1}{\sqrt{ca}} + \frac{1}{\sqrt{ab}}$;
2) $\frac{2}{b+c} + \frac{2}{c+a} + \frac{2}{a+b} \geqslant \frac{9}{a+b+c}$.

803 Доказать, что для любых положительных чисел a, b, c, d справедливо неравенство $\sqrt{(a+c)(b+d)} \geqslant \sqrt{ab} + \sqrt{cd}$.

804 Пусть a, b, c — положительные числа, такие, что $abc = 1$. Доказать, что $(1 + a)(1 + b)(1 + c) \geqslant 8$.

805 Доказать, что при всех действительных значениях x справедливо неравенство $x^{12} - x^9 + x^4 - x + 1 > 0$.

806 Представить многочлен $x^8 + x^4 + 1$ в виде произведения трёх многочленов с целыми коэффициентами.

807 Сократить дробь:

1) $\frac{a^3 - 2a^2 + 5a + 26}{a^3 - 5a^2 + 17a - 13}$; 2) $\frac{2a^4 + a^3 + 4a^2 + a + 2}{2a^3 - a^2 + a - 2}$.

808 Построить график функции:

1) $y = |x - 2| + |x + 4|$; 2) $y = |x - 3| - |x - 1|$;

3) $y = \sqrt{x^2 + 4x + 4} + \sqrt{x^2 - 6x + 9}$;

4) $y = \sqrt{x^2 + 10x + 25} - \sqrt{x^2 - 2x + 1}$; 5) $y = \dfrac{3x - 2}{|x - 1|}$;

6) $y = \dfrac{2|x| - 1}{|x| - 4}$; 7) $y = \dfrac{1}{x^2 - x - 2}$; 8) $y = \dfrac{1}{x^2 - |x|}$.

Решить неравенство **(809—810)**.

809 1) $\dfrac{17 - 42x}{5x^2 - 7x + 2} > 6$; 2) $\dfrac{15 - 4x}{x^2 - x - 12} < 4$;

3) $\dfrac{x^4 - 3x^2 - 4}{x^4 + 8x^2 - 9} > 0$; 4) $\dfrac{x^3 - 5x^2 - x + 5}{x^3 + 2x^2 - 9x - 18} < 0$;

5) $|x^2 - 4x| \leqslant 3x - 6$; 6) $|x^2 - 2x - 3| < |x + 1|$.

810 1) $\sqrt{1 - x^2} + 1 < \sqrt{3 - x^2}$; 2) $x + 4 > 2\sqrt{4 - x^2}$;

3) $\sqrt{x^2 - 6x} < 8 + 2x$; 4) $2 - 3x < \sqrt{4 + 9x - 9x^2}$;

5) $\dfrac{2x + 3}{\sqrt{6x^2 + 7x - 3}} < 2$; 6) $\dfrac{2 - \sqrt{x + 3}}{x - 1} > -\dfrac{1}{3}$.

811 Три числа, сумма которых равна 24, являются последовательными членами арифметической прогрессии. Если к этим числам прибавить соответственно 2, 2 и 7, то полученные числа будут последовательными членами геометрической прогрессии. Найти эти числа.

812 Три числа, сумма которых равна 28, являются первыми тремя членами геометрической прогрессии. Если из этих чисел вычесть соответственно 1, 3 и 9, то полученные числа будут последовательными членами арифметической прогрессии. Найти сумму первых 10 членов геометрической прогрессии.

813 Найти четыре числа, первые три из которых являются последовательными членами геометрической прогрессии, а последние три — последовательными членами арифметической прогрессии. Сумма крайних чисел равна 21, а сумма средних чисел равна 18.

814 Доказать, что если положительные числа a, b, c являются последовательными членами арифметической прогрессии, то числа

$$\frac{1}{\sqrt{b} + \sqrt{c}}, \quad \frac{1}{\sqrt{c} + \sqrt{a}}, \quad \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$$

также являются последовательными членами арифметической прогрессии.

815 Доказать, что если положительные числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ являются последовательными членами арифметической прогрессии, то

$$\frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}}+\frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{a_{n-1}}+\sqrt{a_n}}=\frac{n-1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_n}}.$$

816 Пусть числа $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ являются последовательными членами арифметической прогрессии, S_n — сумма n первых членов этой прогрессии. Доказать, что:

1) если $S_m = S_n$, то $S_{m+n} = 0$;

2) если $\frac{S_m}{S_n}=\frac{m^2}{n^2}$, то $\frac{a_m}{a_n}=\frac{2m-1}{2n-1}$;

3) $S_{n+3} = 3S_{n+2} - 3S_{n+1} + S_n$;

4) $S_{3n} = 3(S_{2n} - S_n)$.

817 Пусть S_n — сумма n первых членов геометрической прогрессии. Доказать, что:

1) $S_{n+k} - S_n = q^n S_k$;

2) $S_n(S_{3n} - S_{2n}) = (S_{2n} - S_n)^2$.

818 Найти сумму $S_n = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots + (n+1)x^n$.

819 Найти сумму $6 + 66 + 666 + \ldots + 666\ldots6$, где последнее слагаемое есть n-значное число.

820 Последовательность определяется рекуррентной формулой $x_n = ax_{n-1} + b$, где a, b, x_1 — заданные числа. Найти формулу n-го члена x_n и формулу суммы n первых членов S_n.

821 Последовательность $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ удовлетворяет при всяком $n > 1$ условию $x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1} = 1$. Выразить x_n через x_1, x_2 и n.

822 Пусть $a_1 = a_2 = a_3 = 1$, $a_4 = -1$ и $a_n = a_{n-4} \cdot a_{n-3}$ при $n > 4$. Найти a_{2000}.

823 Последовательность определяется при $n > 2$ рекуррентной формулой $x_n = (\alpha + \beta)x_{n-1} - \alpha\beta x_{n-2}$, где α, β, x_1, x_2 — заданные числа, такие, что $\alpha\beta \neq 0$, $\alpha \neq \beta$. Найти формулу n-го члена x_n.

824 Катер затрачивает на путь от A до B по течению реки a часов, а на обратный путь b часов. Сколько часов будет плыть плот от A до B?

825 Из пункта A в пункт B вышел пешеход. Вслед за ним через 2 ч из пункта A выехал велосипедист, а ещё через 30 мин — мотоциклист. В некоторое время все трое оказались на одинаковом расстоянии от пункта A. Пешеход прибыл в пункт B на 1 ч позже мотоциклиста. На сколько минут раньше пешехода прибыл в B велосипедист?

826 Сплав меди и цинка содержал меди на 640 г больше, чем цинка. После того как из сплава выделили $\frac{6}{7}$ содержащейся в нём меди и 60% цинка, масса сплава оказалась равной 200 г. Сколько весил сплав первоначально?

827 Из пункта A вышел пешеход, а из пункта B навстречу ему одновременно выехал велосипедист. После их встречи пешеход продолжал идти в B, а велосипедист повернул назад и поехал в B. Известно, что пешеход пришёл в B на 2 ч позже велосипедиста, а скорость его в 3 раза меньше скорости велосипедиста. Сколько времени прошло от начала движения до встречи пешехода и велосипедиста?

828 Пловец плывёт против течения реки и встречает плывущую по течению реки пустую лодку. Продолжая плыть против течения ещё t минут после момента встречи, он затем поворачивает назад и догоняет лодку в s метрах от места встречи. Найти скорость течения реки.

829 Дорога из пункта A в пункт B длиной 11,5 км идёт сначала в гору, затем по равнине и, наконец, под гору. Пешеход на путь от A до B и обратно от B до A затратил 6 ч. Скорость его ходьбы в гору была 3 км/ч, на равнине — 4 км/ч, а под гору — 5 км/ч. Сколько километров составляет та часть дороги, которая идёт по равнине?

830 Два пешехода вышли одновременно из пункта A. Первый из них встретился с туристом, идущим в пункт A, через 20 мин после выхода из A, а второй встретил туриста на 5 мин позже, чем первый. Через 10 мин после второй встречи турист пришёл в A. Скорости пешеходов и туриста были постоянными. Найти отношение скоростей пешеходов.

831 Два пешехода вышли одновременно навстречу друг другу: первый — из пункта A, второй — из пункта B. До встречи первый пешеход прошёл на 1 км больше, чем второй. Через 45 мин после встречи первый пешеход пришёл в пункт B. Второй пешеход прибыл в пункт A через 1 ч 20 мин после встречи. Найти расстояние от A до B.

832 Дорога из пункта A до пункта B идёт на подъём, а от пункта B до пункта C имеет спуск. Пешеход затрачивает t часов на путь от A до C и $\frac{t}{2}$ часа на обратный путь. Найти скорость пешехода на подъёме, если его скорость на спуске на a километров в час больше, чем на подъёме, а расстояние от A до C равно s километрам.

833 Из пункта A выехали три велосипедиста, первый — на 1 ч раньше двух других, стартовавших одновременно. Скорость каждого велосипедиста постоянна. Через некоторое время третий велосипедист догнал первого, а второй догнал первого на 2 ч позже, чем третий. Определить отношение скоростей первого и третьего велосипедистов, если отношение скорости второго к скорости третьего равно $\frac{2}{3}$.

834 В колбе имеется раствор поваренной соли. Из колбы в пробирку отливают $\frac{1}{5}$ часть раствора и выпаривают до тех пор, пока процентное содержание соли в пробирке не повысится вдвое. После этого выпаренный раствор выливают обратно в колбу. В результате содержание соли в колбе повышается на 3%. Определить исходное процентное содержание соли.

835 Бригада лесорубов должна была по плану заготовить за несколько дней 216 м^3 древесины. Первые три дня бригада выполняла ежедневно установленную планом норму, а затем каждый день заготавливала 8 м^3 сверх плана. Поэтому за день до срока было заготовлено 232 м^3 древесины. Сколько кубических метров древесины в день должна была бригада заготавливать по плану?

836 По расписанию поезд должен пройти перегон в 120 км с одной и той же скоростью. Однако, пройдя половину перегона с этой скоростью, поезд вынужден был остановиться на 5 мин. Чтобы вовремя прибыть в конечный пункт перегона, машинисту на второй половине перегона пришлось увеличить скорость поезда на 10 км/ч. Определить скорость поезда по расписанию.

837 Катер по реке и автобус по дороге, идущей вдоль берега реки, отправляются одновременно из пункта A в пункт B

и совершают безостановочное движение между A и B. Первая встреча их произошла, когда автобус прошёл $\frac{5}{9}$ всего расстояния от A до B, а вторая встреча — когда автобус после первого захода в B проехал $\frac{1}{8}$ всего расстояния от B до A. Первый раз в пункт B автобус прибыл на 16 мин позже катера. Через сколько часов после начала движения автобус и катер первый раз окажутся одновременно в пункте A?

838 Из пункта A по шоссе в одном направлении одновременно выехали два автомобиля, а спустя некоторое время из того же пункта вслед за ними выехал третий автомобиль. Через час после своего старта третий автомобиль был в 3 раза ближе к первому автомобилю, чем ко второму, а ещё через треть часа — на равном расстоянии от них. Определить, через какое время вслед за первыми двумя автомобилями выехал третий, если он догнал первый автомобиль через $\frac{7}{4}$ ч после старта первых двух автомобилей.

839 Дорога проходит через пункты A и B. Велосипедист выехал из A по направлению к B. Одновременно с ним из пункта B вышли с равными скоростями два пешехода: первый — в пункт A, второй — в противоположном направлении. Велосипедист проехал путь от A до B за 0,5 ч и, продолжая движение, догнал второго пешехода. Это произошло через 1,2 ч после встречи велосипедиста с первым пешеходом. Определить время движения велосипедиста от начала движения до встречи с первым пешеходом.

840 Дорога проходит через пункты A и B. Одновременно и в одном направлении выехали: из A — мотоциклист (в направлении к B), из B — велосипедист. Мотоциклист догнал велосипедиста на расстоянии a километров от B. Если бы мотоциклист и велосипедист выехали одновременно из A в B, то в момент прибытия мотоциклиста в B велосипедист отставал бы от него на b километров. Определить расстояние между пунктами A и B.

841 Автобус из пункта A и автомобиль из пункта B отправляются одновременно и осуществляют безостановочное движение с постоянными скоростями между A и B. Первая встреча их произошла через 42 мин после начала движения, а через 2 ч 34 мин после начала движения автомобиль первый раз обогнал автобус. Через какое время после начала движения автобус и автомобиль первый раз окажутся одновременно в пункте A?

842 Вдоль реки расположены пункты A, B, C (B между A и C). Буксир прошёл путь от A до C за 4 ч. На каждом из участков AB и BC собственная скорость буксира (скорость относительно воды) была постоянна, причём на участке BC в $1\frac{2}{3}$ раза больше, чем на участке AB. Обратный путь от C до A буксир прошёл также за 4 ч, и на всём пути его собственная скорость была в 2 раза больше, чем при движении из A в B. Если бы на обратном пути собственная скорость буксира была такой же, как и при движении из B в C, то участок от C до B он прошёл бы за 3 ч. Сколько времени буксир шёл от A до B?

843 Катер и пароход, отправляясь одновременно из пункта A в пункт B по направлению течения реки, осуществляют безостановочное движение между A и B. За один рабочий день катер делает 5 рейсов, а пароход — 9 рейсов (рейс — движение от A до B и обратно). Через 20 мин после начала движения, когда катер прошёл $\frac{5}{6}$ всего расстояния от A до B, происходит их первая встреча. Определить продолжительность рабочего дня.

Краткие теоретические сведения по курсу алгебры VII—IX классов

ЧИСЛА И ЧИСЛОВЫЕ ВЫРАЖЕНИЯ

1. Число.

Множество *натуральных* чисел: 1; 2; 3; ... .

Множество *целых* чисел: 0; ±1; ±2; ±3; ... .

Множество *рациональных* чисел — числа вида $\frac{m}{n}$, где m — целые, n — натуральные числа. Например, рациональными являются числа $\frac{3}{5}$; $\frac{2}{1}=2$; $-\frac{2}{7}$.

Рациональное число можно представить в виде конечной десятичной дроби или бесконечной периодической десятичной дроби. Например, $\frac{2}{5}=0{,}4$; $-\frac{1}{3}=-0{,}333...=-0{,}(3)$.

Множество *иррациональных* чисел — бесконечные непериодические десятичные дроби. Например, 0,1001000100001... — иррациональное число.

Иррациональными числами являются числа $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, π и др.

Множество *действительных* чисел — рациональные и иррациональные числа.

Множество *комплексных* чисел — числа вида $a+bi$, где a и b — действительные числа, $i^2=-1$.

2. Числовые промежутки — отрезки, интервалы и полуинтервалы.

Отрезок $[a; b]$ — множество чисел x, удовлетворяющих неравенствам $a \leqslant x \leqslant b$, где $a < b$. Например, отрезок $[2; 5]$ — это множество чисел x, удовлетворяющих неравенствам $2 \leqslant x \leqslant 5$.

Интервал $(a; b)$ — множество чисел x, удовлетворяющих неравенствам $a < x < b$, где $a < b$. Например, интервал $(-2; 3)$ — это множество чисел x, удовлетворяющих неравенствам $-2 < x < 3$.

Полуинтервал $[a; b)$ — множество чисел x, удовлетворяющих неравенствам $a \leqslant x < b$; полуинтервал $(a; b]$ — множество чисел x, удовлетворяющих неравенствам $a < x \leqslant b$, где $a < b$. Например, $[3; 8)$ — множество чисел x, таких, что $3 \leqslant x < 8$; $(-4; 2]$ — множество чисел x, таких, что $-4 < x \leqslant 2$.

Множества чисел, удовлетворяющих неравенствам $x > a$, $x < a$, $x \geqslant a$, $x \leqslant a$, можно записывать как $(a; +\infty)$, $(-\infty; a)$; $[a; +\infty)$, $(-\infty; a]$ соответственно.

3. Модуль числа a (обозначается $|a|$) определяется формулой

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{если } a \geqslant 0, \\ -a, & \text{если } a < 0. \end{cases}$$

Геометрически $|a|$ — расстояние от точки 0 до точки, изображающей число a; $|a - b|$ — расстояние между точками a и b.

Для любого числа a выполняется неравенство $|a| \geqslant 0$, причём $|a| = 0$ только при $a = 0$.

Неравенству $|x| \leqslant a$, где $a > 0$, удовлетворяют числа x из отрезка $[-a; a]$, т. е. такие числа x, что $-a \leqslant x \leqslant a$.

Неравенству $|x| < a$, где $a > 0$, удовлетворяют все числа x из интервала $(-a; a)$, т. е. такие числа x, что $-a < x < a$.

Неравенству $|x| \geqslant a$, где $a > 0$, удовлетворяют все числа $x \leqslant -a$ и числа $x \geqslant a$.

Неравенству $|x| > a$, где $a > 0$, удовлетворяют все числа $x < -a$ и числа $x > a$.

4. Числовое выражение образуется из чисел с помощью знаков действий и скобок.

Например, $1{,}2 \cdot (-3) - 9 : (0{,}5 + 1{,}5)$ — числовое выражение.

Значение числового выражения — число, полученное в результате выполнения действий, указанных в этом выражении. Например, число $-21{,}6$ — значение выражения $1{,}2 \cdot (-3) - 9 : 0{,}5$.

5. Порядок выполнения действий.

Действия первой ступени — сложение и вычитание.

Действия второй ступени — умножение и деление.

Действие третьей ступени — возведение в степень.

1) Если выражение не содержит скобок, то сначала выполняют действия третьей ступени, затем действия второй ступени и, наконец, действия первой ступени; при этом действия одной и той же ступени выполняются в том порядке, в котором они записаны.

2) Если выражение содержит скобки, то сначала выполняют все действия над числами, заключёнными в скобках, а затем все остальные действия; при этом выполнение действий над числами в скобках и вне скобок производится в порядке, указанном в п. 1.

3) Если вычисляется значение дробного выражения, то выполняются действия в числителе дроби и в знаменателе и первый результат делится на второй.

4) Если выражение содержит скобки, заключённые внутри других скобок, то сначала выполняют действия во внутренних скобках.

6. Стандартный вид числа — запись числа в виде $a \cdot 10^n$, где $1 \leqslant |a| < 10$, n — целое, которое называют порядком числа. Например, $345{,}4 = 3{,}454 \cdot 10^2$, $0{,}003 = 3 \cdot 10^{-3}$, $-0{,}12 = -1{,}2 \cdot 10^{-1}$.

7. Погрешность приближения.

Абсолютная погрешность приближения — модуль разности между точным значением величины и её приближённым значением. Если a — приближённое значение, а x — точное, то абсолютная погрешность равна $|x - a|$.

Запись $x = a \pm h$ означает, что абсолютная погрешность приближения не превосходит h, т. е. $|x - a| \leqslant h$, или $a - h \leqslant x \leqslant a + h$. При этом говорят, что x равно a с точностью до h. Например, запись $\pi = 3{,}14 \pm 0{,}01$ означает, что $|\pi - 3{,}14| \leqslant 0{,}01$, т. е. число π равно 3,14 с точностью до 0,01.

При округлении числа с недостатком с точностью до 10^{-n} сохраняются n первых знаков после запятой, а последующие отбрасываются. Например, при округлении числа 17,2397 с недостатком до тысячных, т. е. до 10^{-3}, получаем 17,239, до сотых — 17,23, до десятых — 17,2.

При округлении числа с избытком с точностью до 10^{-n} n-й знак после запятой увеличивается на единицу, а все последующие отбрасываются. Например, при округлении числа 2,5143 с избытком до тысячных получаем 2,515, до сотых — 2,52, до десятых — 2,6. Погрешность округления в обоих случаях не превосходит 10^{-n}.

Округление с наименьшей погрешностью: если первая отбрасываемая цифра данного числа меньше 5, то округляют с недостатком, а если эта цифра больше или равна 5, то округляют с избытком. Например, при округлении числа 8,351 до сотых получаем 8,35, а при округлении до десятых — 8,4.

Запись $x \approx a$ означает, что число a является приближённым значением числа x. Например, $\sqrt{2} \approx 1{,}41$.

Относительная погрешность — частное от деления абсолютной погрешности на модуль приближённого значения величины. Если x — точное значение, a — приближённое, то относительная погрешность равна $\frac{|x - a|}{|a|}$. Относительную погрешность обычно выражают в процентах. Например, если точное значение величины равно 1,95, а приближённое равно 2, то относительная погрешность приближения равна

$$\frac{|2 - 1{,}95|}{2} = \frac{0{,}05}{2} = 0{,}025, \text{ или } 2{,}5\%.$$

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ВЫРАЖЕНИЯ

8. Алгебраическое выражение образуется из чисел и букв с помощью знаков действий и скобок.

Примеры алгебраических выражений:

$$2(m+n);\quad 3a+2ab-1;\quad (a-b)^2;\quad \frac{2x+y}{z}.$$

Значение алгебраического выражения — число, полученное в результате вычислений после замены в этом выражении букв числами. Например, числовое значение выражения $3a + 2ab - 1$ при $a = 2$ и $b = 3$ равно $3 \cdot 2 + 2 \cdot 2 \cdot 3 - 1 = 17$.

9. Алгебраическая сумма — запись, состоящая из нескольких алгебраических выражений, соединённых знаками «+» или «−».

Правила раскрытия скобок.

1) Если к алгебраическому выражению прибавляется алгебраическая сумма, заключённая в скобки, то скобки и знак «+» перед скобками можно опустить, сохранив знак каждого слагаемого этой алгебраической суммы, например:

$$14 + (7 - 23 + 21) = 14 + 7 - 23 + 21.$$
$$a + (b - c - d) = a + b - c - d.$$

2) Если из алгебраического выражения вычитается алгебраическая сумма, заключённая в скобки, то скобки и знак «−» перед скобками можно опустить, изменив знак каждого слагаемого этой алгебраической суммы на противоположный, например:

$$14 - (7 - 23 + 21) = 14 - 7 + 23 - 21.$$
$$a - (b - c - d) = a - b + c + d.$$

10. Одночлен — алгебраическое выражение, представляющее собой произведение числовых и буквенных множителей.

Примеры одночленов: $3ab$, $-2ab^2c^3$, a^2, a, $0{,}6xy^5y^2$, $-t^4$.

Например, числовыми множителями одночлена

$$3a^2\,(0{,}4)\cdot b\,(-5)\,c^3$$

являются 3; 0,4; −5, а буквенными — a^2, b, c^3.

Одночлен стандартного вида — одночлен, который содержит только один числовой множитель, стоящий на первом месте, и степени с различными буквенными основаниями.

Чтобы записать одночлен в стандартном виде, нужно перемножить все его числовые множители и поставить их произведение на первое место, затем произведения степеней с одинаковыми основаниями записать в виде степеней.

Коэффициент одночлена — числовой множитель одночлена, записанного в стандартном виде.

Например, коэффициент одночлена $\frac{3}{4}abc^2$ равен $\frac{3}{4}$, коэффициент одночлена $-7a^3b$ равен −7, коэффициент одночлена a^2bc равен 1, коэффициент одночлена $-ab^2$ равен −1.

11. **Многочлен** — алгебраическая сумма нескольких одночленов. Примеры многочленов: $4ab^2c^3$ — одночлен, $2ab - 3bc$ — двучлен, $4ab + 3ac - bc$ — трёхчлен.

Члены многочлена — одночлены, из которых состоит многочлен. Например, членами многочлена $2ab^2 - 3a^2c + 7bc - 4bc$ являются одночлены $2ab^2$, $-3a^2c$, $7bc$, $-4bc$.

Подобные члены — одночлены, отличающиеся после приведения к стандартному виду только коэффициентами, или одинаковые одночлены.

Приведение подобных членов — упрощение многочлена, при котором алгебраическая сумма подобных одночленов заменяется одним одночленом, например:

$$2ab - 4bc + ac + 3ab + bc = 5ab - 3bc + ac.$$

Стандартный вид многочлена — запись многочлена, в которой все члены записаны в стандартном виде и среди них нет подобных.

Действия над одночленами и многочленами:

1) Чтобы записать алгебраическую сумму нескольких многочленов в виде многочлена стандартного вида, нужно раскрыть скобки и привести подобные члены, например:

$$(2a^2b - 3bc) + (a^2b + 5bc) - (3a^2b - bc) =$$
$$= 2a^2b - 3bc + a^2b + 5bc - 3a^2b + bc = 3bc.$$

2) Чтобы умножить многочлен на одночлен, нужно каждый член многочлена умножить на этот одночлен и полученные произведения сложить, например:

$$(2ab - 3bc)(4ac) = (2ab)(4ac) + (-3bc)(4ac) = 8a^2bc - 12abc^2.$$

3) Чтобы умножить многочлен на многочлен, нужно умножить каждый член одного многочлена на каждый член другого многочлена и полученные произведения сложить, например:

$$(5a - 2b)(3a + 4b) = (5a)(3a) + (5a)(4b) +$$
$$+ (-2b)(3a) + (-2b)(4b) = 15a^2 + 14ab - 8b^2.$$

4) Чтобы разделить многочлен на одночлен, нужно каждый член многочлена разделить на этот одночлен и полученные результаты сложить, например:

$$(4a^3b^2 - 12a^2b^3) : (2ab) =$$
$$= (4a^3b^2) : (2ab) + (-12a^2b^3) : (2ab) = 2a^2b - 6ab^2.$$

12. **Формулы сокращённого умножения.**

1) $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$;
2) $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$;
3) $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$;
4) $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$;
5) $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$;
6) $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$;
7) $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$.

13. Разложение многочлена на множители — представление многочлена в виде произведения двух или нескольких многочленов, например:

$$4x^2 - 9y^2 = (2x + 3y)(2x - 3y).$$

При разложении многочлена на множители используются следующие *способы*:

1) *Вынесение общего множителя за скобки*, например:

$$3ax + 6ay = 3a(x + 2y).$$

2) *Способ группировки*, например:

$$a^3 - 2a^2 + 2a - 4 = (a^3 - 2a^2) + (2a - 4) =$$
$$= a^2(a - 2) + 2(a - 2) = (a - 2)(a^2 + 2).$$

3) *Применение формул сокращённого умножения*, например:

$$9x^2 - \frac{1}{16}y^2 = \left(3x + \frac{1}{4}y\right)\left(3x - \frac{1}{4}y\right);$$
$$27x^3 + 8y^6 = (3x + 2y^2)(9x^2 - 6xy^2 + 4y^4);$$
$$z^2 - 14z + 49 = (z - 7)^2.$$

Разложение квадратного трёхчлена на множители — представление его в виде $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, где x_1, x_2 — корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$. Например:

$$2x^2 + 3x - 2 = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x + 2).$$

14. Алгебраическая дробь — дробь, числитель и знаменатель которой алгебраические выражения.

Примеры алгебраических дробей:

$$\frac{a^2 + b}{c}, \quad \frac{3x - 2y}{a + 1}.$$

Предполагается, что буквы, употребляемые в записи алгебраической дроби, могут принимать только такие значения, при которых знаменатель этой дроби не равен нулю.

Основное свойство дроби: при умножении числителя и знаменателя дроби на одно и то же алгебраическое выражение получается равная ей дробь. Например:

$$\frac{a - b}{a + b} = \frac{(a - b)(a - b)}{(a + b)(a - b)} = \frac{(a - b)^2}{a^2 - b^2}.$$

Используя основное свойство дроби, можно сокращать алгебраическую дробь на общий множитель числителя и знаменателя. Например:

$$\frac{x^2 - 1}{x^3 - 1} = \frac{(x - 1)(x + 1)}{(x - 1)(x^2 + x + 1)} = \frac{x + 1}{x^2 + x + 1}.$$

Сложение и вычитание алгебраических дробей проводятся по тем же правилам, которые применяются для числовых дробей.

Для нахождения алгебраической суммы двух или нескольких дробей эти дроби приводят к общему знаменателю и используют правило сложения дробей с одинаковыми знаменателями.

Например, общий знаменатель дробей $\frac{1}{a^2 b}$ и $\frac{1}{ab^2}$ равен a^2b^2, поэтому

$$\frac{1}{a^2 b} + \frac{1}{ab^2} = \frac{b}{a^2 b^2} + \frac{a}{a^2 b^2} = \frac{b + a}{a^2 b^2}.$$

Умножение и деление алгебраических дробей проводятся по тем же правилам, которые применяются для числовых дробей, например:

$$\frac{2a}{3b} \cdot \frac{b^2}{4a} = \frac{2ab^2}{3b \cdot 4a} = \frac{1}{6} b,$$

$$\frac{x^2 - y^2}{2xy} : \frac{x + y}{4x} = \frac{(x^2 - y^2) \cdot 4x}{2xy(x + y)} = \frac{2(x - y)}{y}.$$

15. Тождество — равенство, справедливое при любых допустимых значениях входящих в него букв. Например, тождествами являются равенства:

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b), \qquad \sqrt{a^2} = |a|,$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1, \qquad \frac{a^2 - 1}{a - 1} = a + 1.$$

ПРОГРЕССИИ

16. Арифметическая прогрессия — числовая последовательность a_1, a_2, ..., a_n, ..., удовлетворяющая условию $a_{n+1} = a_n + d$, где n — любое натуральное число, а d — заданное число, называемое *разностью* этой прогрессии.

Например, последовательность 1, 5, 9, ..., $4n - 3$, ... является арифметической прогрессией с разностью $d = 4$.

Формула n-го члена арифметической прогрессии:

$$a_n = a_1 + (n - 1)d.$$

Формула суммы n первых членов арифметической прогрессии:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n.$$

17. Геометрическая прогрессия — числовая последовательность b_1, b_2, ..., b_n, ..., удовлетворяющая условию $b_{n+1} = b_n q$, где n — любое натуральное число, а q — заданное число, называемое *знаменателем* этой прогрессии, причём $b_1 \neq 0$, $q \neq 0$.

Например, последовательность 3, $\frac{3}{5}$, $\frac{3}{5^2}$, ..., $\frac{3}{5^{n-1}}$, ... является геометрической прогрессией со знаменателем $q = \frac{1}{5}$.

Формула n-го члена геометрической прогрессии:

$$b_n = b_1 q^{n-1}.$$

Формула суммы n первых членов геометрической прогрессии:

$$S = \frac{b_1(1 - q^n)}{1 - q}, \quad q \neq 1.$$

СТЕПЕНИ И КОРНИ

18. Степень числа a с натуральным показателем n, большим 1, — произведение n множителей, равных a, т. е.

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ раз}}.$$

Например, $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2$, $m^5 = \underbrace{m \cdot m \cdot m \cdot m \cdot m}_{5 \text{ раз}}$.

В записи степени a^n число a — *основание степени*, n — *показатель степени*. Например, в записи степени 2^3 число 2 — основание степени, число 3 — показатель степени.

Первая степень числа — само число: $a^1 = a$. Например, $3^1 = 3$, $\left(\frac{1}{13}\right)^1 = \frac{1}{13}$.

Действие возведения в степень — нахождение степени числа.

Основные свойства степени:

1) При умножении степеней с равными основаниями основание остаётся прежним, а показатели степеней складываются:

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}.$$

2) При делении степеней с равными основаниями основание остаётся прежним, а показатели степеней вычитаются:

$$a^n : a^m = a^{n-m}.$$

3) При возведении степени в степень основание остаётся прежним, а показатели степеней перемножаются:

$$(a^n)^m = a^{nm}.$$

4) При возведении произведения в степень в эту степень возводится каждый множитель:

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n.$$

5) При возведении в степень дроби в эту степень возводятся числитель и знаменатель:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.$$

19. Квадратный корень из числа a — такое число, квадрат которого равен a. Например, 6 — квадратный корень из числа 36; число –6 также квадратный корень из числа 36.

Извлечение квадратного корня — действие нахождения квадратного корня. Извлечь квадратный корень можно только из неотрицательного числа.

Арифметический квадратный корень из числа a — неотрицательное число, квадрат которого равен a. Это число обозначается так: $\sqrt{a}$. Например, $\sqrt{16} = 4$, $\sqrt{144} = 12$.

Выражение $\sqrt{a}$ имеет смысл только для $a \geqslant 0$, при этом

$$\sqrt{a} \geqslant 0,\ (\sqrt{a})^2 = a.$$

Свойства квадратных корней:

1) $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$, если $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$.

Например, $\sqrt{144 \cdot 196} = \sqrt{144} \cdot \sqrt{196} = 12 \cdot 14 = 168$.

2) $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$, если $a \geqslant 0$, $b > 0$.

Например, $\sqrt{\frac{169}{225}} = \frac{\sqrt{169}}{\sqrt{225}} = \frac{13}{15}$.

3) $\sqrt{a^{2n}} = a^n$, если $a \geqslant 0$, n — натуральное число.

Например, $\sqrt{3^6} = 3^3 = 27$.

Эти свойства используются при преобразовании выражений, содержащих квадратные корни. Основные из этих преобразований — *вынесение множителя из-под знака корня*:

$$\sqrt{a^2 b} = a\sqrt{b},\text{ если } a \geqslant 0,\ b \geqslant 0,$$

и *внесение множителя под знак корня*:

$$a\sqrt{b} = \sqrt{a^2 b},\text{ если } a \geqslant 0,\ b \geqslant 0.$$

20. Степень с рациональным показателем.

Степень с целым отрицательным показателем определяется равенством $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, где $a \neq 0$, n — натуральное число.

Например, $3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$.

Степень с нулевым показателем определяется равенством $a^0 = 1$, где $a \neq 0$. Например, $4^0 = 1$, $(-0{,}2)^0 = 1$.

Корень натуральной степени из числа a — число, n-я степень которого равна a. Например, числа 2 и (–2) — корни четвёртой степени из 16, число (–3) — корень третьей степени (корень кубический) из числа –27.

Арифметический корень n-й степени из числа a (обозначается $\sqrt[n]{a}$, $n \geqslant 2$) — неотрицательное число, n-я степень которого равна a. Например, $\sqrt[4]{16} = 2$, $\sqrt[3]{27} = 3$.

УРАВНЕНИЯ

21. Уравнение с одним неизвестным — равенство, содержащее неизвестное число, обозначенное буквой.

Пример уравнения: $2x + 3 = 3x + 2$, где x — неизвестное число, которое нужно найти.

Корень уравнения — значение неизвестного, при котором уравнение обращается в верное равенство.

Например, число 3 является корнем уравнения $x + 1 = 7 - x$, так как $3 + 1 = 7 - 3$.

Решить уравнение — это значит найти все его корни или установить, что их нет.

Основные свойства уравнений:

1) Любой член уравнения можно перенести из одной части в другую, изменив его знак на противоположный.

2) Обе части уравнения можно умножить или разделить на одно и то же число, не равное нулю.

22. Квадратное уравнение — уравнение вида $ax^2 + bx + c = 0$, где a, b и c — заданные числа, $a \neq 0$, x — неизвестное число.

Коэффициенты квадратного уравнения называют так: a — первый или старший коэффициент, b — второй коэффициент, c — свободный член.

Примеры квадратных уравнений:

$$2x^2 - x - 1 = 0, \quad 3x^2 + 7x = 0.$$

Неполное квадратное уравнение — квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$, у которого хотя бы один из коэффициентов b или c равен нулю.

Примеры неполных квадратных уравнений:

$$x^2 = 0, \quad 5x^2 + 4 = 0, \quad 8x^2 + x = 0.$$

Формула корней квадратного уравнения:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \text{ где } D = b^2 - 4ac \text{ — дискриминант.}$$

Например, уравнение $3x^2 + 5x - 2 = 0$ имеет два корня:

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 24}}{6} = \frac{-5 \pm 7}{6}, \text{ т. е. } x_1 = \frac{1}{3},\ x_2 = -2;$$

уравнение $x^2 - 6x + 13 = 0$ имеет два корня:

$$x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 52}}{2} = \frac{6 \pm 4i}{2} = 3 \pm 2i.$$

Приведённое квадратное уравнение — уравнение вида

$$x^2 + px + q = 0.$$

Формула корней приведённого квадратного уравнения:

$$x_{1,2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}.$$

Например, корни уравнения $x^2-6x-7=0$ таковы:

$$x_{1,2}=3\pm\sqrt{9+7}=3\pm4, \text{ т. е. } x_1=7,\ x_2=-1.$$

Теорема Виета. Сумма корней приведённого квадратного уравнения равна второму коэффициенту, взятому с противоположным знаком, и их произведение равно свободному члену.

Таким образом, если x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2+px+q=0$, то $x_1+x_2=-p$, $x_1\cdot x_2=q$.

Теорема, обратная теореме Виета. Если числа p, q, x_1, x_2 таковы, что $x_1+x_2=-p$, $x_1x_2=q$, то x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2+px+q=0$.

23. Система двух уравнений с двумя неизвестными — два уравнения с двумя неизвестными x и y, рассматриваемые совместно.

Примеры систем уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases}3x-y=5,\\2x+y=7;\end{cases}\qquad\begin{cases}x-2y=7,\\x^2-4y^2=-35.\end{cases}$$

Решение системы — пара чисел x, y, которые при подстановке в эту систему обращают каждое её уравнение в верное равенство.

Решить систему — это значит найти все её решения или установить, что их нет.

При решении систем линейных уравнений с двумя неизвестными применяются следующие *способы*:

1) *Способ подстановки.*

Из какого-нибудь уравнения одно из неизвестных выражают через другое и подставляют в другое уравнение системы.

2) *Способ алгебраического сложения.*

Уравняв модули коэффициентов при одном из неизвестных системы

$$\begin{cases}a_1x+b_1y=c_1,\\a_2x+b_2y=c_2,\end{cases}$$

почленным сложением или вычитанием уравнений системы исключают это неизвестное.

3) *Графический способ.*

В одной системе координат строят графики уравнений системы; по взаимному расположению графиков определяют число решений системы; находят координаты общих точек графиков (если они есть).

НЕРАВЕНСТВА

24. Числовые неравенства.

Неравенство $a > b$ означает, что разность $a - b$ положительна.

Неравенство $a < b$ означает, что разность $a - b$ отрицательна.

Если $a > b$, то $b < a$.

Неравенство — два числовых или алгебраических выражения, соединённые знаком > или <.

Примеры неравенств: $4 > 7 - 5$; $2a + b < a^2 + b^2$.

Для любых двух чисел a и b только одно из следующих трёх соотношений является верным: $a > b$, $a = b$, $a < b$.

Основные свойства числовых неравенств:

1) Если $a > b$ и $b > c$, то $a > c$.

2) Если прибавить к обеим частям неравенства или вычесть из них одно и то же число, то знак неравенства не изменится: если $a > b$, то $a + c > b + c$ и $a - c > b - c$ для любого числа c.

Любое число можно перенести из одной части неравенства в другую, изменив знак переносимого числа на противоположный.

3) Обе части неравенства можно умножить или разделить на одно и то же число, не равное нулю, тогда, если это число положительно, знак неравенства не меняется, а если это число отрицательно, то знак неравенства меняется на противоположный: если $a > b$, то

$$ac > bc \text{ и } \frac{a}{c} > \frac{b}{c} \text{ при } c > 0, \quad ac < bc \text{ и } \frac{a}{c} < \frac{b}{c} \text{ при } c < 0.$$

Сложение неравенств. Неравенства одинакового знака можно складывать, при этом получается неравенство того же знака: если $a > b$ и $c > d$, то $a + c > b + d$.

Например:

$$+\begin{array}{r} 4 > 3{,}5 \\ -2 > -5 \\ \hline 2 > -1{,}5 \end{array} \qquad +\begin{array}{r} 2{,}3 < 3{,}5 \\ -4 < -3 \\ \hline -1{,}7 < 0{,}5 \end{array}$$

Умножение неравенств. Неравенства одинакового знака, у которых левые и правые части положительны, можно перемножать, при этом получается неравенство того же знака: если $a > b$, $c > d$ и a, b, c, d — положительные числа, то $ac > bd$.

Например:

$$\times\begin{array}{r} 2{,}4 > 2{,}1 \\ 4 > 3 \\ \hline 9{,}6 > 6{,}3 \end{array} \qquad \times\begin{array}{r} 1{,}7 < 2{,}3 \\ 2 < 3 \\ \hline 3{,}4 < 6{,}9 \end{array}$$

Если $a > b$ и a, b — положительные числа, то $a^2 > b^2$, $a^3 > b^3$ и вообще при любом натуральном n выполняется неравенство $a^n > b^n$.

Например, $6^2 > 5^2$, $6^3 > 5^3$, $6^{12} > 5^{12}$.

Строгие неравенства — неравенства со знаками > (больше) и < (меньше).

Например, $5 > 3$, $x < 1$.

Нестрогие неравенства — неравенства со знаками $\geqslant$ (больше или равно) и $\leqslant$ (меньше или равно).

Например, $a^2 + b^2 \geqslant 2ab$, $x \leqslant 3$.

Нестрогое неравенство $a \geqslant b$ означает, что $a > b$ или $a = b$.

Свойства нестрогих неравенств такие же, как и свойства строгих неравенств. При этом в свойствах строгих неравенств *противоположными* считаются знаки $>$ и $<$, а в свойствах нестрогих неравенств — знаки $\geqslant$ и $\leqslant$.

Среднее арифметическое двух чисел a и b — число $\frac{a+b}{2}$.

Среднее геометрическое двух положительных чисел a и b — число $\sqrt{ab}$.

Если $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, то $\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$.

25. Неравенство с одним неизвестным — это неравенство, содержащее неизвестное число, обозначенное буквой.

Примеры неравенств первой степени с одним неизвестным:

$$3x + 4 < 5x - 2; \quad \frac{1}{3}x - 1 \geqslant \frac{3-x}{4}.$$

Решение неравенства с одним неизвестным — значение неизвестного, при котором данное неравенство обращается в верное числовое неравенство.

Например, число 3 является решением неравенства $x + 1 > 2 - x$, так как $3 + 1 > 2 - 3$.

Решить неравенство — это значит найти все его решения или установить, что их нет.

Основные свойства неравенств с одним неизвестным:

1) Любой член неравенства можно перенести из одной части неравенства в другую, изменив его знак на противоположный, при этом знак неравенства не меняется.

2) Обе части неравенства можно умножить или разделить на одно и то же число, не равное нулю; если это число положительно, то знак неравенства не меняется, а если это число отрицательно, то знак неравенства меняется на противоположный.

Система неравенств с одним неизвестным — это несколько неравенств, содержащих одно и то же неизвестное число и рассматриваемых совместно.

Примеры систем неравенств с одним неизвестным:

$$\begin{cases} 2(x-1) > 3, \\ 3x + 4 > 1 - x; \end{cases} \qquad \begin{cases} x + 2 \leqslant 5x, \\ 3(x-1) > 4, \\ x - 4 \leqslant 7. \end{cases}$$

Решение системы неравенств — то значение неизвестного, при котором все неравенства системы обращаются в верные числовые неравенства.

Например, число 2 является решением системы

$$\begin{cases} 3x - 4 < 2x, \\ x + 2 > 3, \end{cases}$$

так как $3 \cdot 2 - 4 < 2 \cdot 2$ и $2 + 2 > 3$.

Вообще, решениями этой системы являются все числа x, такие, что $1 < x < 4$; других решений нет.

Решить систему неравенств — это значит найти все её решения или установить, что их нет.

26. Квадратное неравенство — неравенство, в левой части которого стоит квадратный трёхчлен, а в правой — нуль.

Примеры квадратных неравенств:

$$x^2 - x + 2 > 0, \quad 2x^2 - 3x - 4 \leqslant 0, \quad x^2 - 4 > 0.$$

Для решения квадратного неравенства нужно:

1) определить направление ветвей параболы по знаку первого коэффициента квадратичной функции;

2) найти корни соответствующего квадратного уравнения (если они есть);

3) построить эскиз графика и по нему определить промежутки, на которых квадратичная функция принимает положительные или отрицательные значения.

Например, решая неравенство $2x^2 + 3x - 2 < 0$, имеем:

1) ветви параболы направлены вверх, так как $2 > 0$;

2) корни уравнения $2x^2 + 3x - 2 = 0$ таковы: $x_1 = 0{,}5$, $x_2 = -2$;

3) по эскизу графика функции $y = 2x^2 + 3x - 2$ устанавливаем, что $y < 0$ при $-2 < x < 0{,}5$.

27. Метод интервалов используется для решения неравенств. Рассмотрим, например, неравенство $(x - 1)(x - 2)(x - 3) < 0$. Числа 1, 2 и 3 разбивают числовую ось на 4 интервала: $x < 1$, $1 < x < 2$, $2 < x < 3$, $x > 3$. На каждом из интервалов левая часть неравенства сохраняет знак, и при переходе к соседнему интервалу знак левой части меняется на противоположный. Так как при $x > 3$ левая часть неравенства положительна, то его решениями являются значения x из интервалов $x < 1$ и $2 < x < 3$.

ФУНКЦИИ И ГРАФИКИ

28. Функция. Если каждому значению x из некоторого множества чисел поставлено в соответствие число y, то говорят, что на этом множестве задана функция $y(x)$. При этом x называют *независимой переменной* (или *аргументом*), а y — *зависимой переменной* (или *функцией*).

Область определения функции — множество всех значений, которые может принимать её аргумент. Если функция задана формулой, то считают, что её область определения — множество значений аргумента, при которых эта формула имеет смысл.

Например, функция $y = \sqrt{x - 2}$ определена при $x \geqslant 2$.

Функция $y\ (x)$ называется *возрастающей* на промежутке, если большему значению аргумента соответствует большее значение функции, т. е. для любых x_1, x_2, принадлежащих этому промежутку, из неравенства $x_2 > x_1$ следует неравенство $y(x_2) > y(x_1)$. Например, функция $y = x^3$ возрастает на всей числовой прямой; функция $y = x^2$ возрастает на промежутке $[0; +\infty)$.

Функция $y(x)$ называется *убывающей* на промежутке, если большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции, т. е. для любых x_1, x_2, принадлежащих этому промежутку, из неравенства $x_2 > x_1$ следует неравенство $y(x_2) < y(x_1)$. Например, функция $y = -2x$ убывает на всей числовой прямой; функция $y = x^2$ убывает на промежутке $(-\infty; 0]$, функция $y = \frac{1}{x}$ убывает на промежутках $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$.

График функции $y(x)$ — множество всех точек координатной плоскости с координатами $(x;\ y(x))$.

Пусть область определения функции $y(x)$ симметрична относительно начала координат. Тогда функция $y(x)$ называется *чётной*, если выполняется равенство $y(-x) = y(x)$, и *нечётной*, если $y(-x) = -y(x)$. Например, $y = x^4$ — чётная функция, а $y = x^3$ — нечётная функция.

График чётной функции симметричен относительно оси ординат.

График нечётной функции симметричен относительно начала координат.

29. Линейная функция — функция вида $y = kx + b$, где k и b — заданные числа.

График линейной функции $y = kx + b$ — прямая. При $b = 0$ функция принимает вид $y = kx$, её график проходит через начало координат.

30. Прямая пропорциональная зависимость — зависимость, выражаемая формулой $y = kx$, где $k > 0$, $x > 0$.

Обратная пропорциональная зависимость — зависимость, выражаемая формулой $y = \frac{k}{x}$, где $k > 0$, $x > 0$.

31. Функция $\boldsymbol{y = \frac{k}{x}}$ $(k \neq 0)$ определена при $x \neq 0$, принимает все действительные значения, кроме нуля.

Если $k > 0$, то функция $y = \frac{k}{x}$ $\left(\text{например, } y = \frac{2}{x},\ y = \frac{1}{2x}\right)$:

а) принимает положительные значения при $x > 0$ и отрицательные при $x < 0$;

б) убывает на промежутках $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$.

Если $k < 0$, то функция $y=\frac{k}{x}$ (например, $y=-\frac{1}{x}$, $y=-\frac{2}{x}$, $y=-\frac{1}{3x}$):

а) принимает положительные значения при $x < 0$ и отрицательные при $x > 0$;

б) возрастает на промежутках $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$.

График функции $y=\frac{k}{x}$ называется *гиперболой*. Она имеет две ветви, расположенные симметрично относительно начала координат. При $k > 0$ график расположен в первом и третьем квадрантах, а при $k < 0$ — во втором и четвёртом квадрантах.

32. Квадратичная функция — функция вида $y = ax^2 + bx + c$, где a, b, c — заданные действительные числа, $a \neq 0$, x — действительная переменная.

Графиком квадратичной функции является *парабола*.

В частности, графиком функции $y = x^2$ является парабола с вершиной в точке $(0; 0)$; ось симметрии этой параболы — ось ординат.

В общем случае *вершиной параболы*

$$y = ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2 + y_0$$

является точка $(x_0; y_0)$, где $x_0=\frac{-b}{2a}$, $y_0 = y(x_0)$.

Ось симметрии параболы — прямая, параллельная оси ординат и проходящая через вершину параболы. При $a > 0$ ветви параболы направлены вверх, при $a < 0$ — вниз.

Параболу $y = ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2 + y_0$ можно получить сдвигом параболы $y = ax^2$ вдоль координатных осей. Например, параболу $y = 3(x + 2)^2 + 4$ можно получить сдвигом параболы $y = 3x^2$ вдоль оси Ox на две единицы влево и вдоль оси Oy на четыре единицы вверх.

Схема построения графика квадратичной функции

$$y = ax^2 + bx + c:$$

1. Построить вершину параболы $(x_0; y_0)$, вычислив x_0, y_0 по формулам $x_0=-\frac{b}{2a}$, $y_0 = y(x_0)$ или методом выделения полного квадрата.

2. Провести через вершину параболы прямую, параллельную оси ординат, — ось симметрии параболы.

3. Найти нули функции, если они есть, и построить на оси абсцисс соответствующие точки параболы.

4. Построить две какие-нибудь точки параболы, симметричные относительно её оси, например точки с абсциссами $x = 0$ и $x = 2x_0 = -\frac{b}{a}$ и ординатой $y = c$.

5. Провести через построенные точки параболу.

Наибольшее и наименьшее значения квадратичной функции.

Квадратичная функция $y = ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2 + y_0$:

а) принимает наименьшее значение, равное y_0 при $x = x_0$, если $a > 0$;

б) принимает наибольшее значение, равное y_0 при $x = x_0$, если $a < 0$.

Например, квадратичная функция $y = 2(x - 1)^2 + 3$ принимает при $x = 1$ наименьшее значение, равное 3;

квадратичная функция $y = -4(x + 2)^2 - 5$ принимает при $x = -2$ наибольшее значение, равное -5.

КОМБИНАТОРИКА

Правило произведения. Если существует n вариантов выбора первого элемента и для каждого из них есть m вариантов выбора второго элемента, то всего существует $n \cdot m$ различных пар с выбранными первым и вторым элементами.

Например, с помощью трёх букв a, b и c можно составить $3 \cdot 3 = 9$ различных двухбуквенных кодов, в которых буквы могут быть одинаковыми, и $3 \cdot 2 = 6$ различных двухбуквенных кодов, в которых буквы должны быть разными.

СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ

Вероятность наступления события A (обозначают $P(A)$) — отношение $\frac{m}{n}$, где n — число равновозможных попарно несовместных исходов испытания, в котором наблюдается событие A, m — число благоприятствующих наступлению события A исходов, т. е. $P(A) = \frac{m}{n}$.

Например, при одном бросании игральной кости $n = 6$ (выпало 1 очко, выпало 2 очка, ..., выпало 6 очков); событию A — выпало чётное число очков, благоприятствуют $m = 3$ исходов (выпало 2, или 4, или 6 очков), поэтому $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Относительная частота события A (обозначается $W(A)$) в данной серии испытаний — отношение числа испытаний M, в которых это событие произошло, к числу всех проведённых испытаний N.

Например, если в серии из 30 выстрелов ($N = 30$) только 24 поразили мишень ($M = 24$), то относительная частота попадания по мишени в этой серии выстрелов равна

$$W = \frac{M}{N} = \frac{24}{30} = \frac{4}{5} = 0{,}8.$$

Статистическая вероятность события — число, около которого колеблется относительная частота этого события при большом числе испытаний.

СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

Таблица распределения, полигон частот, диаграммы и др. — *способы наглядного представления* выборки значений случайной величины.

Размах (R) выборки значений случайной величины — разница между наибольшим и наименьшим значениями данной выборки.

Например, для выборки 2, 1, 1, 3, 5 размах $R = 5 - 1 = 4$.

Мода (Mo) — наиболее часто встречающееся значение случайной величины выборки.

Например, для выборки 2, 7, 2, 8, 9 мода $Mo = 2$; у выборки 7, 3, 2, 3, 2, 5, 4 две моды $Mo_1 = 3$ и $Mo_2 = 2$.

Медиана (Me) — серединное значение упорядоченного ряда значений случайной величины выборки.

Например, для выборки 6, 7, 7, 8, 9 медиана $Me = 7$; для выборки 5, 6, 6, 7, 8, 9 медиана $Me = \frac{6 + 7}{2} = 6{,}5$.

Ответы

1. 1) $x+5$; 2) $1-x$; 3) $3x-1$; 4) $2x^2+3x-1$; 5) $3x+1$; 6) $5x-2$. **2.** 1) $3x^2-x-1$; 2) $3x^2+2x-2$; 3) $5x^2+2x$; 4) $3x^3+2$. **3.** 1) $P(x)=(x+5)Q(x)+14$; 2) $P(x)=(4x-13)Q(x)+38$; 3) $P(x)=(3x^2-2)\times Q(x)+5$; 4) $P(x)=(2x-3)Q(x)-2x+4$. **4.** 1) $M(x)=x^2+\frac{2}{3}x-\frac{4}{9}$, $R(x)=\frac{8}{9}$; 2) $M(x)=\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$, $R(x)=-\frac{5}{2}x+\frac{15}{2}$; 3) $M(x)=3x$; $R(x)=10x^2-x+7$; 4) $M(x)=2x^2+x-3$, $R(x)=x+3$. **5.** 1) $x^4-x^3+x^2-x+1$; 2) $x^5+x^4+x^3+x^2+x+1$; 3) частное x^3-4x, остаток $8x-7$; 4) частное $3x^2+5$, остаток $15x^2+x$. **6.** 1) Нет; 2) нет; 3) нет; 4) да. **7.** 1) $a=3$; 2) $a=10$; 3) $a=3$; 4) $a=2$. **8.** 1) $4x+3$; 2) $4x^2+3x$; 3) $2x^3-x$; 4) x^2+2. **9.** 1) $x+4$; 2) x^2+2x; 3) x^3+2x^2; 4) $3x^3-x$. **10.** 1) $x_1=3$, $x_{2,3}=-1\pm\sqrt{3}$; 2) $x_1=1$, $x_2=-2$, $x_{3,4}=\pm\sqrt{2}$; 3) $x_1=-2$, $x_2=\frac{1}{2}$, $x_3=-\frac{1}{3}$; 4) $x_1=1$, $x_{2,3}=\pm\frac{1}{2}$. **11.** 1) $x=3$; 2) $x=-2$; 3) $x_1=2$, $x_2=-3$; 4) $x_1=-2$, $x_2=3$. **12.** 1) $(x-4)(2x-1)(3x+1)$; 2) $(x+3)(2x+\sqrt{3})(2x-\sqrt{3})$; 3) $(x-2)\times(x+3)(2x+1)(2x-1)$; 4) $(x+1)(x-5)(x+1+\sqrt{2})(x+1-\sqrt{2})$. **13.** 1) $\frac{x+3}{x-1}$; 2) $\frac{x^2+x+1}{2x^2-x+1}$; 3) $\frac{x^2-x+1}{2x^2-x+3}$; 4) $x+1$. **14.** 1) $x_1=1$, $x_{2,3}=\pm2$, $x_{4,5}=\pm\sqrt{3}$; 2) $x_1=-1$, $x_2=2$, $x_3=\frac{1}{2}$; $x_{4,5}=\pm\sqrt{2}$; 3) $x_1=1$, $x_2=-2$, $x_{3,4}=\pm\sqrt{2}$, $x_{5,6}=\pm\sqrt{3}$; 4) $x_{1,2}=\pm1$, $x_3=-\frac{1}{3}$. **15.** $a=1$, $b=6$, $x_3=3$. **18.** 1) $x=-3$; 2) $x_1=2$, $x_2=-3$, $x_{3,4}=\pm\frac{1}{2}$; 3) $x_1=1$, $x_2=\frac{1}{3}$, $x_3=-\frac{1}{2}$; 4) $x=2$. **19.** 1) $x_1=2$, $x_2=\frac{1}{2}$, $x_3=3$, $x_4=\frac{1}{3}$; 2) $x_{1,2}=2\pm\sqrt{3}$,

$x_{3,4} = -3 \pm 2\sqrt{2}$. **20.** 1) $x_1 = 1$, $x_2 = -2$, $x_3 = 3$; 2) $x_1 = 1$, $x_{2,3} = 1 \pm \sqrt{3}$; 3) $x_1 = 2$, $x_2 = -\frac{1}{3}$; 4) $x = \frac{1}{2}$. **21.** 1) $x_{1,2} = \pm 1$, $x_{3,4} = 2 \pm \sqrt{5}$; 2) $x_1 = 2$, $x_2 = -\frac{1}{2}$, $x_{3,4} = 3 \pm \sqrt{10}$. **22.** 1) $x = 4$; 2) действительных корней нет; 3) $x_1 = -1$, $x_2 = -\frac{1}{2}$; 4) $x = \frac{1}{2}$. **23.** $a < -3$, $-3 < a < 0$, $0 < a < 1$. **24.** $a \neq 0$, ± 3, $-\frac{3}{2}$. **25.** 1) (5; 7), (7; 5); 2) (6; 2); 3) (3; 1), (1; 3); 4) (8,5; 7,5). **26.** 1) (3; 5), (–3; –4); 2) (1; 3), (19; –3); 3) (3; 2), (2; 3); 4) (3; 0), (1; –2). **27.** 1) (8; –5), (–5; 8); 2) (9; 2), (–2; –9); 3) (3; 5), (5; 3); 4) (3; 5), (–5; –3). **28.** 1) (3; –1); 2) (9; 4); 4) (4; 3), (–4; –3), (3; 4), (–3; –4). **29.** 1) (2; 1); 2) (2; 5), (5; 2); 3) (5; 2), (–2; –5); 4) (4; 5), (5; 4). **30.** 1) (3; 1), (1; 3), (–3; –1), (–1; –3); 2) (3; 5), (5; 3), (–3; –5), (–5; –3); 4) (7; 1), (–7; –1), (1; 7), (–1; –7). **31.** 2) (20; 4), (–20; –4); 3) (5; 2), (–2; –5); 4) (6; 3), (3; 6). **32.** 1) (3; 2), (–3; –2); 4) (5; 2), (–5; –2), (5; –2); (–5; 2); 6) (5; 1). **33.** 1) (3; 1); 2) (5; 3), (–5; –3), (3; 5), (–3; –5); 4) (1; 3), (39; –187). **34.** 1) (25; 16), (16; 25); 2) (9; 1), (1; 9); 3) (1; 4), (4; 1); 4) (49; 36). **35.** 1) (2; 3; 5), (–2; –3; –5), $\left(\frac{10}{3}; 5; 3\right)$, $\left(-\frac{10}{3}; -5; -3\right)$; 2) (1; 3; 4), (–1; –3; –4). **36.** 1) $(3a; -a)$, $(-a; 3a)$; 2) $(-b; -2b)$, $(2b; b)$. **37.** 15 и 9, –9 и –15. **38.** 24 и 6, $19\frac{1}{2}$ и $1\frac{1}{2}$. **39.** 4 см и 3 см. **40.** 12 см и 15 см. **41.** 35 билетов по 140 р. и 20 билетов по 175 р. **42.** 30 дней и 20 дней. **43.** 9 ч и 6 ч. **44.** 80 лошадей, норма овса 15 кг; 25 лошадей, норма 4 кг. **45.** 1) $x^2 - x + 2$; 2) $x + 1$; 3) частное $2x^2 - 1$, остаток $x - 4$; 4) частное $3x^3 - 2x^2 + x - 1$, остаток 2. **46.** 1) $x_1 = 2$, $x_2 = \frac{1}{3}$, $x_3 = -\frac{3}{2}$; 2) $x_1 = 4$, $x_2 = 1$, $x_3 = -2$; 3) $x_1 = 2$, $x_2 = -3$; 4) $x_1 = 1$, $x_2 = -2$, $x_{3,4} = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$. **47.** 1) $x_1 = -2$, $x_{2,3} = \pm\frac{1}{2}$; 2) корней нет. **48.** 1) (1; 0), $\left(-\frac{1}{2}; -\frac{3}{2}\right)$; 2) (17; 10), (4; –3). **49.** 1) (–9; –4), $\left(2; \frac{10}{3}\right)$; 2) (–2; 5), $\left(-7\frac{1}{2}; 3\frac{5}{8}\right)$. **50.** 5 см и 6 см. **51.** 21 см и 28 см. **52.** 12 и 8. **53.** $\frac{2}{3}$ и $\frac{3}{2}$. **54.** 1) $x = -3$; 2) $x_{1,2} = \pm 2$; 3) $x_1 = -1$, $x_2 = 2$, $x_{3,4} = \pm\frac{1}{2}$; 4) $x_1 = 1$, $x_{2,3} = \pm 2$. **55.** 1) $x = 1$; 2) $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = -\frac{1}{3}$. **56.** $a \neq 0$, ± 2, $\pm\frac{1}{2}$, $\pm\frac{1}{6}$, $\pm\frac{2}{3}$. **57.** 1) (1; 2; 3), (–1; –2; –3), $\left(2; 1; \frac{3}{2}\right)$, $\left(-2; -1; -\frac{3}{2}\right)$; 2) (2; 5; 1), $\left(-\frac{10}{3}; -\frac{1}{3}; -\frac{13}{3}\right)$; 3) (3; 5), (–5; –3); 4) (3; 0), $\left(-\frac{1}{3}; -\frac{5}{3}\right)$. **58.** 5 ч и 7 ч. **59.** 20%. **60.** 20 км/ч. **61.** 21 ряд, 5 рядов. **62.** 2) 32; 4) 0. **63.** 2) $\left(\frac{1}{5}\right)^5$; 4) $\left(\frac{c}{d}\right)^2$. **65.** 2) 21^{-3}; 4) a^{-9}. **66.** 2) $\frac{121}{81}$; 4) 32; 6) $-\frac{1}{169}$. **67.** 2) $\frac{53}{16}$; 4) –875. **69.** 2) $\frac{1}{(x+y)^3}$; 4) $\frac{9a^3}{b^4}$; 6) $\frac{a^2}{bc^4}$.

70. 2) -125; 4) $\frac{1}{17}$. **71.** 2) 0,0016; 4) $\frac{16}{625}$. **72.** 2) b^8; 4) b^{-28}. **73.** 2) a^8b^{-4}; 4) $3^{-4}a^{-12}$. **74.** 2) $m^{12}n^{-15}$; 4) $-64x^{-15}y^3z^{-9}$. **75.** 2) $\frac{97}{9}$. **76.** 2) $2{,}7 \cdot 10^{-11}$; 4) $1{,}25 \cdot 10^8$. **77.** 2) $5{,}086 \cdot 10^{-8}$; 4) $1{,}6 \cdot 10^{-3}$. **78.** 0,003. **79.** 10^{-11}. **80.** 0,0001 мм. **81.** 2) a^5, $\frac{1}{32}$. **82.** 2) 0. **83.** 2) 0,43; 4) 1,44. **84.** 2) $8{,}51929 \cdot 10^5$; 4) $6{,}644672 \cdot 10^3$. **85.** 2) $3{,}25 \cdot 10^{16}$ км^3. **86.** 2) $b - a$. **88.** 4) 15. **89.** 2) 81; 4) $\frac{1}{81}$. **90.** 2) -1; 4) -4; 6) -8. **91.** 2) $x = -\frac{1}{2}$; 4) $x_1 = -2$, $x_2 = 2$. **92.** 2) x — любое число; 4) $\frac{2}{3} \leqslant x < 2$. **93.** 2) 5; 4) -11; 6) $\frac{1}{30}$. **94.** 2) 2; 4) $4\sqrt{6}$. **95.** 1) $x - 2$; 2) $(3 - x)^3$ при $x \leqslant 3$, $(x - 3)^3$ при $x > 3$. **96.** 3974. **97.** 2) 48; 4) 20. **98.** 2) 33; 4) 7. **99.** 2) 0,2; 4) 2. **100.** 2) 50; 4) 16. **101.** 2) a^2b^3; 4) a^2b^3. **102.** 2) $3ab$; 4) $\frac{2}{b}$. **103.** 2) $\frac{2}{3}$; 4) $\frac{3}{2}$. **104.** 2) $\frac{2}{5}$; 4) 2; 6) 4. **105.** 2) $3x$; 4) $\frac{2b}{a}$. **106.** 2) $\frac{1}{3}$; 4) $\frac{1}{4}$. **107.** 2) 4; 4) 5. **108.** 2) y^2; 4) a^8b^9; 6) $3a$. **109.** 2) $\frac{3}{2}$; 4) $\frac{3}{2}$; 6) 4. **110.** 2) 6; 4) $\frac{1}{2}$; 6) 4. **111.** 2) $\frac{2a^2}{b}$; 4) $\frac{a}{b}$; 6) a^2b. **112.** 2) ab^2c; 4) $2xy$. **113.** 2) $3x$; 4) 0. **114.** 2) 7,55. **115.** 2) 7; 4) 1. **117.** 3) $2\sqrt[4]{b}$; 4) 1. **120.** 2) 3; 4) 27; 6) $\frac{1}{27}$. **121.** 2) 5; 4) $\frac{1}{2}$; 6) $\frac{1}{2}$. **122.** 2) 49; 4) 125. **123.** 2) 121; 4) 150. **124.** 2) 3; 4) 2,7. **125.** 2) b^1; 4) a^1; 6) y^0. **126.** 2) 3; 4) $\frac{1}{5}$. **127.** 2) a^2b; 4) x^3. **128.** 2) 1; 4) $a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}$. **129.** 2) 3; 4) 6. **130.** 3) $b^{\frac{1}{2}}$; 4) $a + b$. **131.** 2) $a^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{4}}$; 4) $\sqrt{c} - 1$. **132.** 2) $\dfrac{a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}}}$; 4) $2\sqrt{b}$. **133.** 2) $2y$; 4) $2\sqrt[3]{b}$. **134.** 2) $2\sqrt[3]{b}$; 4) $\dfrac{2\sqrt[3]{a}}{a + b}$. **135.** 2) 2,05; 4) 1,49; 5) 36,46. **137.** 2) $\left(\frac{5}{12}\right)^{-\frac{1}{4}} < (0{,}41)^{-\frac{1}{4}}$; 4) $\left(\frac{11}{12}\right)^{-\sqrt{5}} > \left(\frac{12}{13}\right)^{-\sqrt{5}}$. **138.** 2) $x = 3$; 4) $x = 2$; 6) $x = \frac{1}{2}$. **139.** 2) $\sqrt[5]{\left(1\frac{1}{4} - 1\frac{1}{5}\right)^3} > \sqrt{\left(1\frac{1}{6} - 1\frac{1}{7}\right)^3}$. **140.** 2) $x = \frac{5}{2}$; 4) $y = 5$. **141.** 2) $x = 2{,}6$; 4) $x = 4$. **142.** 2) $x = -\frac{1}{3}$; 4) $x = 1$. **143.** 2) 6; 4) -3. **144.** 2) 2,1; 4) 27,2. **145.** 2) 0,074. **146.** 2) -3; 4) $\frac{25}{16}$. **147.** 2) 51; 4) 0,04; 6) $-0{,}1$. **148.** 2) 1000. **149.** 2) $\sqrt[4]{x}$; 4) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2 - y^2}}$. **150.** 2) $x = -1$; 4) $x = 1$. **151.** 2) $\frac{95}{16}$; 4) $-609\frac{8}{27}$. **152.** 2) x — любое число; 4) $x \leqslant 2$, $x \geqslant 3$; 6) $0 \leqslant x \leqslant 2$, $x \geqslant 3$. **153.** 2) $a + 1$; 4) $a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}}$; 6) $a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}$;

8) $a^{\frac{1}{6}}+b^{\frac{1}{6}}$. **154.** $R < a$. **155.** 0,86 с. **156.** 2) $y = 1$ при $x = 2$, $y = 5$ при $x = 0$ и $x = 4$, $y = 10$ при $x = -1$ и $x = 5$, $y = 17$ при $x = -2$ и $x = 6$. **157.** 1) $y(-2) = -1$, $y(0) = -5$, $y\left(\frac{1}{2}\right) = -11$, $y(3) = 4$; 2) $y = -3$ при $x = -\frac{1}{2}$, $y = -2$ при $x = -1$, $y = 13$ при $x = \frac{3}{2}$, $y = 19$ при $x = \frac{4}{3}$. **159.** 2) $x \leqslant 2$, $x \geqslant 5$; 4) $-2 \leqslant x < 3$. **160.** 1) $y(-3) = 3$, $y(-1) = 1$, $y(1) = -1$, $y(3) = -1$; 2) $y = -2$ при $x = 2$, $y = 0$ при $x = 0$ и $x = 4$, $y = 2$ при $x = -2$ и $x = 6$, $y = 4$ при $x = -4$ и $x = 8$. **161.** 3) $x \neq -1$; 4) $-1 \leqslant x \leqslant 1$, $x \geqslant 4$; 6) $x \geqslant 0$. **162.** 2) Да; 4) да. **167.** 2) $x = 16$; 3) $x = \frac{1}{16}$; 4) $x = \frac{1}{243}$. **169.** 2) $x = 32$; 4) $x = 8$. **172.** 2) Нечётная; 4) не является ни чётной, ни нечётной. **173.** 2) Нечётная; 4) нечётная; 6) не является чётной и не является нечётной. **182.** 2) $x = 0$. **183.** 2) $(-1; 0)$. **184.** 2) $y = -\frac{1}{2}$ при $x = -4$; 4) $y \leqslant 1$ при $x < 0$ и при $x \geqslant 2$. **186.** 2) $(-2; 4)$ и $(2; -4)$; 4) $(-4; -2)$ и $(1; 3)$. **192.** 2) $x \leqslant 3$; 4) $y < 5$; 6) $x < -5$, $x > 5$. **193.** 2) Ребро куба больше 7 дм. **196.** 2) $x = 10$; 4) $x = 5$. **197.** 2) $x = 2$; 4) $x = 2$, $x = -7$. **198.** 2) $x = 4$; 4) $x = 0{,}2$. **199.** 2) $x = \frac{7}{3}$. **200.** 2) $x > -3$; 4) $x < 2$; 6) $x < 1$, $x > 7$. **202.** 2) $x = -2$; 4) $x_1 = 1$, $x_2 = 3$. **203.** 2) $x = 2{,}25$. **204.** 2) $x = 1$; 4) $x = 5$. **205.** 2) $x = 4$. **206.** 2) $2 \leqslant x \leqslant 3$; 4) $1 < x \leqslant 2$; 6) $x \geqslant 1$. **207.** Не меньше 6,24 м. **208.** 2) $x \neq \frac{3}{2}$; 4) x — любое число. **213.** 2) $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; -\sqrt{2}\right)$, $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \sqrt{2}\right)$; 4) $(-1; -1)$, $(1; 1)$. **214.** 2) $x > 2$; 4) $x \leqslant -2$. **215.** 2) $x = 16$; 4) $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{1}{3}$; 6) $x = -1$. **216.** 1) x — любое число; 2) $2 \leqslant x \leqslant 11$; 4) $x < -7$, $-3 \leqslant x < -1$, $x \geqslant 3$. **217.** 2) Убывает; 4) убывает. **218.** 2) Нечётная; 4) не является чётной и не является нечётной. **220.** 2) $-2 \leqslant x \leqslant \frac{1}{3}$. **221.** 1) $-1 < x \leqslant 0$; $3 \leqslant x < 4$. 2) $x \geqslant 4$. **222.** 2) $x_1 = -1$, $x_2 = 7$; 4) $x_1 = 3$, $x_2 = 7$. **224.** 2) $a_1 = 4$, $a_2 = 7$, $a_3 = 10$; 4) $a_1 = -\frac{1}{3}$, $a_2 = 0$, $a_3 = \frac{1}{3}$; 6) $a_1 = -1$, $a_2 = -8$, $a_3 = -27$. **226.** 2) Да; 4) да. **227.** 2) 2, 1, 3, −1. **228.** 2) 9. **229.** 256, 16, 4, 2. **230.** 2) 1, $\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{\sqrt{3}}{9}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{\sqrt{3}}{27}$. **231.** $a_5 = -7$. **232.** 2) $2(n-9)$, $2(n-8)$, $2(n-5)$; 4) $7\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n+3}$, $7\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n+4}$, $7\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n+7}$. **234.** 2) −3, −1, 1, 3, 5. **236.** 2) 79; 4) −42. **237.** 2) $a_n = 29 - 4n$; 4) $a_n = 6 - 5n$. **238.** 12. **239.** Да. **240.** $n = 11$, нет. **241.** 2) 0,5. **242.** 2) −13. **243.** 2) −100. **244.** 2) $a_n = 5n - 17$. **245.** $n \geqslant 9$. **246.** $n < 25$. **247.** 2) $a_9 = -57$, $d = 7$; 4) $a_9 = -1$, $d = -1{,}5$. **248.** 44,1 м. **249.** 10 дней. **250.** 30. **251.** 60. **252.** 2) 10 050; 4) 2550. **253.** 4850. **254.** 4489. **255.** 2) −192. **256.** 2) 204. **257.** 2) 240. **258.** 4905, 494 550. **259.** 2) 2900. **260.** −45. **261.** 10. **262.** 2) $a_{10} = 15\frac{5}{6}$, $d = \frac{3}{2}$. **263.** 2) $a_1 = -88$, $d = 18$.

264. 78 бревен. **265.** 44. **266.** $a_1 = 5$, $d = 4$. **269.** 2) $-3, 12, -48, 192, -768$. **271.** 2) $\frac{1}{16}$; 4) $\frac{1}{81}$. **272.** 2) $b_n = 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$; 4) $b_n = 3 \cdot \left(-\frac{4}{3}\right)^{n-1}$. **273.** 2) 5; 4) 8. **274.** 2) $\frac{1}{2}$; 4) $-\frac{1}{5}$. **275.** 1) $b_8 = 4374$; 2) $n = 5$. **276.** $b_7 = 3\sqrt{3}$, $q = \frac{1}{\sqrt{3}}$. **277.** $b_5 = 6$, $b_1 = 30\frac{3}{8}$ или $b_5 = -6$, $b_1 = -30\frac{3}{8}$. **278.** 33708 р. **279.** 0,25 см^2. **280.** 5. **282.** 2) $-\frac{31}{8}$; 4) $-\frac{275}{81}$; 6) -400. **283.** 2) 2186. **284.** 2) $b_1 = -1$, $b_8 = 128$. **285.** 2) $n = 7$; 4) $n = 5$. **286.** 2) $n = 9$, $b_9 = 2048$; 4) $n = 5$, $q = 7$. **287.** 2) 364; 4) 305. **288.** 2) $b_5 = 4802$, $S_4 = 800$. **289.** $-1\frac{31}{32}$. **291.** 2) $q = 5$, $b_3 = 300$ или $q = -6$, $b_3 = 432$. **292.** 2) $q = 2$ или $q = -2$; 4) $S_5 = 781$ или $S_5 = 521$. **293.** 2) 4, 16, 64; 4) $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{10}$. **294.** 2) $a_{10} = 1$, $a_{30} = \frac{39}{59}$; 4) $a_{10} = 0$, $a_{30} = 0$. **295.** $\frac{11}{16}$. **296.** 2) $d = -\frac{1}{2}$, $a_4 = 2$, $a_5 = 1\frac{1}{2}$; 4) $d = -3$, $a_4 = \sqrt{2} - 9$, $a_5 = \sqrt{2} - 12$. **298.** $-5\frac{1}{3}$. **299.** 2) -1080. **300.** 2) 143; 4) 280,5. **301.** 2) -22. **302.** 2) $q = -\frac{1}{2}$, $b_4 = -\frac{1}{32}$, $b_5 = \frac{1}{64}$; 4) $q = -\sqrt{2}$, $b_4 = -10\sqrt{2}$, $b_5 = 20$. **303.** 2) $b_n = -0{,}5\,(-2)^{n-1}$. **304.** 2) $b_4 = \frac{125}{8}$. **305.** 2) $S_{10} = 1\frac{85}{256}$; 4) $S_9 = 5$. **306.** 2) 242; 4) $\frac{65}{36}$. **307.** $\frac{3}{2}$. **308.** $d = 3$. **309.** 2) 14, 11, 8, 5, 2. **310.** $-\frac{5}{2}$. **311.** 2) $a_{19} = 0$, $a_1 = -108$. **312.** 2) $x_1 = \frac{1}{3}$, $x_2 = -4$. **313.** 14. **314.** 2) $a_{16} = -1\frac{2}{3}$, $d = -\frac{2}{15}$. **315.** 2) 27. **316.** 2) -27; 4) $\pm\frac{1}{25}$. **317.** 6. **318.** В среду. **319.** 180 раз. **320.** $a_1 = 8$, $d = -3$ или $a_1 = 2$, $d = 3$. **321.** $a_1 = 5$, $d = -5$ или $a_1 = -5$, $d = 5$. **323.** 72. **324.** $1024a$. **325.** 3 ч. **327.** 1) Случайное; 2) случайное. **328.** 1) Случайное; 2) невозможное. **329.** 1) Случайное; 2) случайное; 3) невозможное; 4) достоверное. **330.** 1) Невозможное; 2) достоверное. **331.** 1) Случайное; 2) невозможное; 3) невозможное; 4) случайное; 5) достоверное. **332.** 1) Совместные; 2) несовместные. **333.** 1) Несовместные; 2) совместные. **334.** 1) Совместные; 2) совместные; 3) несовместные; 4) несовместные. **337.** Не являются. **338.** 1) Не являются; 2) являются. **339.** 1) Являются; 2) являются; 3) являются; 4) не являются; 5) являются. **340.** 1) Являются; 2) не являются. **343.** 1) $\frac{2}{5}$; 2) $\frac{3}{5}$; 3) 0; 4) 1. **344.** 1) $\frac{2}{9}$; 2) $\frac{1}{3}$; 3) $\frac{4}{9}$; 4) $\frac{7}{9}$; 5) $\frac{2}{3}$; 6) $\frac{5}{9}$. **345.** 1) $\frac{1}{10}$; 2) $\frac{1}{2}$; 3) $\frac{3}{10}$; 4) $\frac{1}{5}$; 5) $\frac{1}{5}$; 6) $\frac{2}{5}$. **346.** $\frac{1}{10}$. **347.** 1) $\frac{1}{50}$; 2) $\frac{49}{50}$. **348.** $\frac{24}{25}$. **349.** $\frac{1}{2}$. **350.** 1) $\frac{1}{36}$; 2) $\frac{1}{9}$; 3) $\frac{1}{18}$; 4) $\frac{5}{36}$; 5) $\frac{1}{12}$. **351.** $P(A) = \frac{8}{27}$; $P(B) = \frac{4}{9}$; $P(C) = \frac{2}{9}$; $P(D) = \frac{1}{27}$. **352.** 1) $\frac{1}{4}$; 2) $\frac{1}{2}$. **353.** 1) $\frac{1}{4}$; 2) $\frac{1}{4}$. **354.** 1) $\frac{1}{36}$; 2) $\frac{1}{18}$; 3) $\frac{1}{6}$; 4) $\frac{1}{2}$; 5) $\frac{1}{4}$; 6) $\frac{1}{6}$; 7) $\frac{1}{6}$;

8) $\frac{1}{18}$; 9) $\frac{1}{12}$; 10) $\frac{1}{18}$; 11) $\frac{1}{12}$; 12) $\frac{1}{6}$. **355.** 1) $\frac{1}{18}$; 2) $\frac{1}{12}$; 3) $\frac{1}{18}$; 4) $\frac{1}{9}$. **356.** 1) $\frac{1}{6}$; 2) $\frac{1}{6}$. **357.** 1) $\frac{1}{24}$; 2) $\frac{1}{24}$. **358.** 1) $\frac{1}{216}$; 2) $\frac{1}{72}$. **359.** 1) $\frac{1}{3}$; 2) $\frac{1}{3}$. **360.** $\frac{1}{6}$. **361.** 1) $\frac{1}{2}$; 2) $\frac{1}{2}$. **362.** 1) $\frac{1}{6}$; 2) $\frac{2}{3}$. **363.** 1) $\frac{3}{5}$; 2) $\frac{2}{5}$. **364.** 1) $\frac{1}{630}$; 2) $\frac{1}{105}$. **365.** 1) $\frac{1}{4}$; 2) $\frac{1}{6}$; 3) $\frac{1}{2}$; 4) $\frac{1}{3}$; 5) $\frac{5}{12}$. **366.** 1) $\frac{1}{6}$; 2) $\frac{1}{2}$; 3) $\frac{1}{3}$; 4) $\frac{5}{6}$; 5) 1. **367.** $\frac{\pi}{49}$. **369.** $\frac{238}{250}$. **370.** 2,5%. **371.** $P \approx 0{,}6$. **372.** $P_1 \approx 0{,}84$; $P_2 \approx 0{,}14$. **374.** 1) $\frac{1}{4}$; 2) $\frac{1}{3}$; 3) $\frac{5}{12}$; 4) $\frac{3}{4}$; 5) $\frac{2}{3}$; 6) $\frac{7}{12}$; 7) 0; 8) 1. **375.** 1) $\frac{1}{30}$; 2) $\frac{29}{30}$; 3) $\frac{1}{6}$; 4) $\frac{1}{5}$; 5) $\frac{1}{3}$; 6) $\frac{2}{15}$. **376.** 0,01. **377.** 1) $\frac{1}{12}$; 2) $\frac{1}{4}$. **378.** 1) $\frac{1}{4}$; 2) $\frac{1}{18}$; 3) $\frac{1}{4}$; 4) $\frac{1}{2}$. **379.** 1) $\frac{1}{9}$; 2) $\frac{1}{18}$; 3) $\frac{1}{6}$; 4) $\frac{4}{9}$. **380.** 1) $\frac{1}{8}$; 2) $\frac{1}{8}$. **381.** 1) $\frac{3}{10}$; 2) $\frac{1}{10}$; 3) $\frac{3}{5}$; 4) $\frac{2}{5}$. **382.** 1) $\frac{11}{36}$; 2) $\frac{3}{4}$.

384.

X	0	1	2
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

385.

X	2	3	4	5	6	7	8
P	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$

386.

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10
P	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{24}$

388.

X	34	35	36	37	38	39	40
M	1	3	4	6	3	2	1
W	$\frac{1}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{20}$

390. В таблице приведён результат анализа страницы текста из «Севастопольских рассказов» Л. Н. Толстого.

А	Б	В	Г	Д	Е	Ж	З
0,090	0,027	0,056	0,012	0,025	0,087	0,007	0,013

И	Й	К	Л	М	Н	О	П
0,057	0,007	0,036	0,045	0,029	0,066	0,137	0,025

Р	С	Т	У	Ф	Х	Ц	Ч
0,047	0,061	0,054	0,017	0,001	0,014	0,007	0,014

Ш	Щ	Ъ	Ы	Ь	Э	Ю	Я
0,012	0,006	0,001	0,008	0,015	0,002	0,010	0,012

391. Онегин, добрый мой приятель, родился на брегах Невы, / Где, может быть, родились вы / Или блистали, мой читатель.

395. 1)

X	145—149	150—154	155—159	160—164	165—169	170—174	175—179	180—184
M	1	9	14	8	7	6	3	2

397. 1. 3); 2. 3); 3. 3). **399.** 200. **400.** 240. **401.** 60; 100; 120; 240; 220; 140; 80; 40. **402.** 9600; 6000; 4800; 4200; 3300; 1500; 600. **403.** 1) 8; 2 и 6; 4; 2) 11; 2; 2. **404.** 1) 3; 3; 3; 2) 7; 3 и 5; 3. **405.** 1) $R = 6$; $Mo = -2$; $Me = 1$; 2) $R = 0{,}5$; $Mo_1 = 0{,}1$, $Mo_2 = 0{,}2$, $Mo_3 = 0{,}4$, $Mo_4 = 0{,}5$; $Me = 0{,}35$. **406.** 1) 3; 2) $-0{,}5$; 3) $2\frac{1}{7}$; 4) 5. **407.** 1) $2\frac{1}{7}$; 2) 2,5. **409.** 7,00 г/см^3; железо. **410.** 12,25 года; 13 лет. **411.** 135 см — высота, являющаяся медианой и модой совокупности, а также приближённым средним значением совокупности, из которой удалён «случайный» результат 90 см. **412.** $\overline{X} \approx 12$ лет; $Mo = 19$ лет; $Me = 11$ лет.

413.

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
P	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{3}{64}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{5}{64}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{7}{64}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{7}{64}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{5}{64}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{64}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{64}$

414. 2)

Размер (X)	42	44	46	48	50	52	54	56	58
Кол-во халатов (M)	1500	3000	9000	18 000	16 500	10 500	9000	4500	1500

3) $Mo = 48$, $Me = 50$, $\overline{X} \approx 50$, $R = 16$. **417.** Верны высказывания $6 \in M$, $-3 \notin M$. **418.** Верны высказывания $1 \in A$, $8 \notin A$. **419.** Верны высказывания $12 \in B$, $3 \in B$. **420.** 2) $\{1; 5\}$, $\{1\}$, $\{5\}$, $\varnothing$; 4) $\{4; 5; 6\}$, $\{4; 5\}$, $\{5; 6\}$, $\{4; 6\}$, $\{4\}$, $\{5\}$, $\{6\}$, $\varnothing$. **421.** 2) -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4) -2; -3. **422.** 1) Окружность с центром в точке A и радиусом 3; 2) серединный перпендикуляр к отрезку AB. **423.** 1) $\{-3\}$; 2) $\{-1; 1; 2\}$. **424.** 2) $A\backslash B = \{2; 3\}$, $B\backslash A = \{-1; 0\}$; 4) $A\backslash B = \{7\}$, $B\backslash A = \{-5; -6\}$. **425.** 1) Иррациональные; 2) целые отрицательные числа и число 0. **426.** 2) $A \cap B = \{c\}$, $A \cup B = \{a; b; c; d\}$; 4) $A \cap B = \varnothing$, $A \cup B = \{a; b; c; d; e\}$. **427.** 2) $A \cap B = \{1\}$, $A \cup B = \{-1; 0; 1; 2; 3\}$; 4) $A \cap B = \{5; 6\}$, $A \cup B = \{-6; -5; 5; 6; 7\}$. **428.** $[4; 7]$, $[2; 9]$. **429.** $[6; 7]$, $[5; 8]$. **430.** $\{-2\}$, $\{-2; 6; 7\}$. **431.** $A \cap B = \{1; 3; 9\}$; НОД (18, 45). **432.** $C \cap D = \{x\colon x = 90k,\ k \in N\}$; НОК (18, 45). **433.** $\{0; 1; 2\}$. **434.** $\{-1; 0; 1; 3\}$. **435.** 2) $(-\infty; 1]$; $\{-1; 0\}$. **436.** 1) A_1; 2) A_2; 3) A_1; 4) A_3; 5) A_4; 6) A_4; 7) A_1. **437.** 1) $7 \neq 7$, 2) $45 < 3$; 3) любое натуральное число не является целым числом; 4) у Земли не только один естественный спутник. **438.** 2) $\{5; 10; 15; 20; 25\}$; 4) 1.

439. 2) [2; 3]; 4) R. **440.** 2) Истинно, истинно; 4) ложно, истинно. **441.** 2) Ложно, истинно; 4) истинно, истинно. **442.** 2) «Если каждый член последовательности, начиная со второго, равен полусумме соседних с ним членов, то эта последовательность — арифметическая прогрессия». **443.** 2) «Если при пересечении двух прямых секущей образовавшиеся накрест лежащие углы равны, то эти прямые параллельны»; истинна; 4) «Если диагональ четырёхугольника делит его на два равных треугольника, то этот четырёхугольник — параллелограмм»; ложна. **444.** 2) Равносторонний треугольник; 4) равносторонний треугольник. **445.** 2) $n + (n + 1) + (n + 2) = 3n + 3 = 3(n + 1)$, т. е. сумма трёх последовательных натуральных чисел делится на 3. **446.** 1) Достаточно; 2) необходимо и достаточно; 3) необходимо. **447.** 2) $2\sqrt{5}$; 4) $\sqrt{29}$; 6) 10. **448.** 2) $x^2 + y^2 = 49$. **449.** 1) A, E; 2) D, F. **450.** 2) $(x + 3)^2 + y^2 = 4$; 4) $(x + 2)^2 + (y - 4)^2 = 0{,}25$; 6) $(x + 3)^2 + (y + 2)^2 = 3\frac{1}{16}$. **451.** 2) (2; 5), (–10; 5). **453.** 2) (–1,5; 2,5); 4) (–4; –2,5). **454.** 2) K (0; 1). **455.** 2) P (–2,9; 0). **456.** 2) $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 25$; 4) $(x + 4)^2 + (y + 4)^2 = 52$. **457.** 2) $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 10$. **458.** 2) Окружность с центром в точке C (4; 6) и радиусом $r = 8$; 4) окружность с центром в точке C (3; –1) и радиусом $r = \sqrt{10}$. **459.** 2) $x - 2y = 0$; 4) $5x + 2y = 0$. **460.** 2) $x - 3y = 2$; 4) $4x - 5y = 27$. **461.** 2) $x - 4 = 0$, $y + 7 = 0$. **462.** 2) $k = 4$; 4) $k = -2{,}5$. **463.** 2) Пересекаются; 4) совпадают; 6) параллельны. **464.** 2) Параллельны; 4) пересекаются; 6) совпадают. **465.** 2) (6; –1). **466.** 2) $4x + 3y = 3$. **467.** $2x + 5y = -4$, $2x - 3y = -4$, $2x + y = 4$. **468.** 2) (0; 0,5), $\left(\frac{2}{3}; 0\right)$. **469.** 2) $a = 1$, $b = 3{,}5$. **470.** 2) $x - y = 1$. **473.** 2) Две точки с координатами $x_1 \approx 3{,}6$, $y_1 \approx -1{,}6$; $x_2 \approx -1{,}6$, $y_2 \approx 3{,}6$; 4) две точки с координатами (2; 2) и (–2; 2). **474.** 2) Две точки с координатами (0; 0) и (1; 1). **481.** 2) $\{1; 2\}, \{1\}, \{2\}, \varnothing$; 4) $\{m; n; p\}$, $\{m; n\}$, $\{m; p\}$, $\{n; p\}$, $\{m\}$, $\{n\}$, $\{p\}$, $\varnothing$. **482.** 2) $\{-3; 1\}$; 4) $\{k; l; m; p\}$. **483.** 2) $A \setminus B = \{f\}$, $B \setminus A = \{a; d\}$; 4) $A \setminus B = \{3; 7\}$, $B \setminus A = \{2; 4\}$. **484.** 2) $M \cup K = \{a; b; c; d; e; k\}$, $M \cap K = (a; c; e)$; 4) $M \cup K = \{-5; -3; -1; 1; 2; 3\}$, $M \cap K = \varnothing$. **485.** 2) [–6; 2]; [–4; –2]; 4) [–5; 2]; $\{-2\}$. **486.** 2) $17 \neq 17$; 4) $15 \geqslant 7$. **487.** 2) $\{1; 3; 5; 9; 15; 45\}$; 4) $\{-3; -2; -1; 0; 1; 2\}$. **488.** 2) $\{4\}$; 4) $\{-3\}$. **489.** 2) Истинно, истинно; 4) ложно, истинно. **490.** 2) Нечётное число 5 не делится на 3; 4) сумма углов треугольника не равна 360°. **491.** 2) $6\sqrt{2}$; 4) $3\sqrt{10}$. **492.** 2) $x^2 + y^2 = 2{,}25$. **493.** 2) $(x - 2)^2 + (y + 6)^2 = 16$; 4) $(x + 1{,}5)^2 + (y + 3)^2 = 25$. **494.** 1) A, D; 2) B, C. **495.** 2) $4x - 5y = 20$; 4) $14x + 13y = -33$. **496.** 2) $\frac{4}{3}$; 4) $-\frac{2}{3}$. **497.** $x + y = 1$ и $2x + 2y = 5$; $2x - 4y = 3$ и $-x + 2y = 4$. **498.** $3x + y = 2$, $\frac{x}{2} + y = 2$. **501.** 2) (–3; 3]; $\{-1\}$; 4) (–3; –7); [2; 4]. **502.** 2) Ложно, истинно; 4) истинно, истинно; 6) ложно, истинно; 8) ложно, истинно. **503.** 2) «Если $ab > 0$, то $a > 0$ и $b > 0$»; ложно; 4) «Если отрезок параллелен одной из сторон треугольника, то этот отрезок является средней линией треугольника»; ложно. **504.** 2) (–2; 3), (–1; –1), (1; 2). **505.** 2) (–19; 13). **506.** (2; 9). **507.** (–3,5; –3). **508.** 2) $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 26$. **509.** $(0; 3 + \sqrt{5})$, $(0; 3 - \sqrt{5})$. **510.** $(4 + \sqrt{7}; 0)$, $(4 - \sqrt{7}; 0)$. **511.** 2) (2; 0), (0; 2). **512.** $2x - 11y = 10$, $7x - 4y = 12$, $5x + 7y = 2$. **513.** 2) (1; –6). **514.** 2) Точка с координатами $\left(-\frac{1}{3}; 4\right)$; 4) две прямые: $x=8$ и $y=-9$; 6) две прямые: $3x-\sqrt{5}y=0$ и $3x+\sqrt{5}y=0$. **516.** 2) Две точки с координатами $x_1\approx 1{,}6$, $y_1\approx 3{,}6$ и $x_2\approx -1{,}6$, $y_2\approx 3{,}6$; 4) две точки с координатами $x_1\approx -0{,}2$, $y_1\approx -0{,}3$ и $x_2\approx -1{,}8$, $y_2\approx -0{,}3$; 6) точка с координатами $x\approx 0{,}7$, $y\approx 1{,}3$.

Упражнения для повторения курса алгебры VII—IX классов

517. 2) $7-3x-x^2$; 4) $2x^3-3x^2+4x-5$. **518.** 2) $x_1=1$, $x_2=-\frac{1}{2}$, $x_3=-\frac{2}{3}$. **519.** 2) $(5; -5)$, $(-5; 5)$. **520.** 2) $2\frac{1}{3}$; 4) $\frac{2x^2}{3y}$. **521.** 2) $3-\sqrt[3]{2}$; 4) $6\sqrt{7}$. **522.** 2) $(0{,}3)^{\sqrt{2}}<(0{,}37)^{\sqrt{2}}$. **523.** 2) $5ab\sqrt{b}$; 4) $11ab\sqrt{ab}$. **524.** 2) $-\sqrt{3x^2}$; 4) $\sqrt{5a^2}$. **525.** 2) $x=\frac{1}{9}$; 4) $x=0$. **526.** 2) Нет. **527.** 2) Нет. **528.** 2) $1{,}5<x\leqslant 7$; 4) $x\geqslant -7{,}5$; 6) $0\leqslant x<2$, $x>2$. **530.** Нет. **531.** 2) $a_n=3^n$. **532.** 1, 4, 28, 280. **533.** 2) $a_{12}=47{,}5$, $S_{12}=537$; 4) $a_{18}=11\frac{2}{3}$, $S_{18}=108$. **534.** 1220. **536.** 2) $b_1=5$. **537.** 2) $b_4=125$, $S_4=156$; 4) $b_5=81$, $S_5=61$. **538.** $15\frac{3}{4}$. **539.** 1679 м/с. **540.** 1,68 м. **541.** 2) Нет. **542.** 2) $x_{1,2}=\pm 1$, $x_{3,4}=\pm 2$, $x_5=-3$. **543.** 2) $(1; 3)$, $(-1; -3)$. **544.** 2) -1; 4) $-\frac{1}{x}$. **545.** Первое. **546.** Убывает. **547.** 2) $x\leqslant 0$, $x\geqslant 6$; 4) $x\neq\sqrt{3}\pm\sqrt{6}$; 6) $x\leqslant -3$, $0<x<2$, $x\geqslant 3$. **549.** 2) $x=61$; 4) $x=2$; 5) $x_1=0$, $x_2=-3$, $x_3=2$. **550.** 8 ч. **551.** $39\frac{2}{3}$. **552.** 7, -28, 112, -448 или $-11\frac{2}{3}$, $-46\frac{2}{3}$, $-186\frac{2}{3}$, $-746\frac{2}{3}$. **553.** $b_1=5$, $b_5=405$. **554.** 8, 13, 18 или 20, 13, 6. **555.** 6,40 Ом. **557.** 1) $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{7}}{\sqrt{2}}$; 2) $\frac{1+\sqrt{7}}{\sqrt{2}}$. **558.** 1) $1-\sqrt{a}$; 2) $a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}$. **560.** 10, 4, -2, 1 или $-\frac{5}{4}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{7}{4}$, $\frac{49}{4}$. **561.** 6, 18, 54 или 26, 26, 26. **562.** 2) 4; 4) $4\frac{3}{4}$. **563.** 2) 5,8; 4) $-\frac{1}{11}$. **564.** 2) $x=7$; 4) $x=0{,}5$; 6) $x=2{,}25$. **565.** 2) 3; 4) 0,1125. **566.** 2) 300; 4) 3600. **567.** 2) 5%; 4) $16\frac{2}{3}$%. **568.** 2) $5a^4b$; 4) $-\frac{8}{3}a^8b^7$. **569.** 2) $35-2x-2x^3-x^5$; 4) $8a^2+4b^2+36a+36$. **570.** 2) 4,9; 4) 2. **571.** 2) $b^2-7a^2b^3$. **572.** 2) $\left(\frac{b}{3}-1\right)\left(\frac{b}{3}+1\right)$; 4) $(b-\sqrt{3})(b+\sqrt{3})(b^2+3)$. **573.** 2) $\left(\frac{b}{2}+1\right)^2$; 4) $(1+9b)^2$. **574.** 2) $(a+1)(a-x)$; 4) $(a-x)(5a-7)$. **575.** 2) $2a^3b(a-1)^2$; 4) $(a-b)^2(a+b)^2$. **576.** 2) $2(x-3)^2$; 4) $(x-1)(x+2)$. **577.** 2) $\frac{b+3}{3b}$; 4) $\frac{3y}{4x}$; 6) $\frac{x+4}{x+5}$; 8) $\frac{x-1}{x+2}$. **578.** 2) $\frac{3}{2}m^2$; 4) $\frac{3c^2}{k^3}$; 6) $\frac{15a}{4c}$; 8) $(x+1)(x-2)$. **579.** 2) $\frac{6-5a}{a^2-4}$; 4) $\frac{3b-a^2}{a(b^2-a^2)}$. **580.** 2) $\frac{1}{2a+3}$; 4) $b+a-1$. **581.** 2) $\frac{2}{a(a+2)}$; 4) $\frac{1}{a+1}$. **582.** 3) $\frac{x}{y}$; 4) $\frac{10}{2a+1}$. **583.** 2) $-0{,}25$; 4) $1\frac{9}{16}$. **584.** 2) 3. **585.** 2) $\frac{1}{x+\sqrt{2}}$; 4) $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$. **586.** 2) 4; 4) 8. **587.** 2) -2; 4) 0; 6) 7. **588.** 2) 2; 4) 14. **589.** 2) $\frac{\sqrt{3}}{11}$; 4) $6\sqrt{2}$. **590.** 2) $2\cdot 10^{-3}$;

4) $1{,}2 \cdot 10^{-3}$. **591.** 2) 1,25. **592.** 2) 3,5. **593.** 2) x^2y^9; 4) xy^2. **594.** 2) -1; 4) $1+\sqrt{m}$. **595.** 100 кг. **596.** 10%. **597.** 340 кг. **598.** 44 р. **599.** 3) $-6m^4 + 27m^3 - 47m^2 + 41m - 7$; 4) $a^4b^2 - 6a^2b^3 + 9b^4$. **600.** 2) $(4a^3 - 5b^4) \times (4a^3 + 5b^4)$; 4) $(m - n + k)(m + n - k)$; 6) $\left(\frac{1}{5}a^3b - \frac{2}{7}c^4\right)\left(\frac{1}{5}a^3b + \frac{2}{7}c^4\right)$; 8) $(a+b+2)^2$. **601.** 2) $(2a-3b^2)^2$; 4) $(5b^2+4a)^2$. **602.** 2) $(5x-3y) \times (x\sqrt{5}+2y)(x\sqrt{5}-2y)$; 4) $(xy-3)(8y^2-7a)$. **603.** 2) m^2; 3) $-\frac{b}{3a}$. **604.** 2) $-0{,}6$. **605.** 2) 1; 4) 6; 6) $\frac{3}{32}$; 8) 6. **606.** 2) $\frac{1}{x^2+xy+y^2}$; 4) $\frac{m}{\sqrt{m}+1}$. **607.** 2) -1; 4) $-0{,}5$. **608.** 2) $-0{,}02x^6y$. **609.** 2) $33\frac{1}{3}$; 4) 4,8. **610.** 2) $\sqrt{a}-1$; 4) $\frac{a}{16-a^2}$. **611.** 2) $1-\sqrt{b}$; 4) $1+m\sqrt{m}$. **612.** 2) $x=1$; 4) $x=-0{,}5$. **613.** 2) $x=12\frac{1}{14}$; 4) $x=-13{,}5$. **614.** 2) $x=3$; 4) $x=-9$. **615.** 2) $x_1=-2$, $x_2=3$; 4) $x_1=5$, $x_2=-1$. **616.** 2) $x_1=0$, $x_2=5$; 4) $x_1=0$, $x_2=-\frac{1}{6}$; 6) $x_{1,2}=\pm 2$; 8) $x_{1,2}=\pm 2\sqrt{2}$. **617.** 2) $x_1=-1$, $x_2=1{,}5$; 4) $x_1=5$, $x_2=-\frac{3}{4}$. **618.** 2) $z_{1,2}=4\pm i\sqrt{2}$; 4) $z_{1,2}=\frac{2\pm i}{5}$. **619.** 2) $x_1=1$, $x_2=4{,}5$; 4) $x_1=-5$, $x_2=0{,}5$. **620.** 2) $x_1=-3$, $x_2=5$; 4) $x=-1$; 6) $x_1=4{,}3$, $x_2=-11{,}7$. **621.** 2) $x=3$; 4) $x=-4$. **622.** 2) $x_{1,2}=\pm 1$, $x_{3,4}=\pm 6$; 4) $x_{1,2}=\pm 2$, $x_{3,4}=\pm i$. **623.** 2) $x=33$; 4) $x=9$; 6) $x_1=1$, $x_2=4$. **624.** 2) $x_{1,2}=2\pm\sqrt{3}$, $x_{3,4}=\frac{-5\pm\sqrt{21}}{2}$. **625.** 2) $x=-1$; 4) $x_1=1$, $x_2=-0{,}5$; 6) $x=4$. **626.** 2) (3; 7); 4) (2; 3); 6) (−2; −3). **627.** 2) (1; −1); 4) (2; 2). **628.** 2) (5; 3), (−3; −5); 4) (4; −9), (−9; 4); 6) (4; 5), (−4; −5), (5; 4), (−5; −4). **629.** 2) $x=6$; 4) $x=0{,}5$. **630.** 2) $3(1+\sqrt{5})$; 4) $x=\frac{9+4\sqrt{2}}{7}$. **631.** 2) $x_1=0$, $x_2=2$; 4) $x \leqslant 1$. **632.** 2) $x=2$; 4) $x=-1$. **633.** 2) $x_1=-\frac{1}{2}$, $x_2=-3$. **634.** 2) $x=4$; 4) $x=3$; 6) $x=0$. **635.** 1) $x_1=-a$, $x_2=6a$; 2) $x_1=2a$, $x_2=5a$; 3) $x_{1,2}=3a\pm b$; 4) $x_{1,2}=2a\pm b$. **636.** 1) $x_1=0$, $x_2=a$; 2) $x_1=0$, $x_2=\frac{1}{a}$; 3) $x_1=0$, $x_2=-\frac{b}{a}$; 4) $x_1=0$, $x_2=-\frac{a}{b}$; 5) $x_1=0$, $x_2=-\frac{b}{a}$; 6) $x_1=0$, $x_2=\frac{b}{a^2}$. **637.** 2) (5; 4); 4) (1; 1). **638.** 1) (2; −1), (−2; 1), (0,5; −0,5), (−0,5; 0,5); 2) (2; 8), (−2; −8), (8,5; −5), (−8,5; 5); 3) (1; 2), (2; 1); 4) $\left(\frac{6}{13}; -\frac{6}{11}\right)$; 6) (3; 9), (−3; −9), $(\sqrt{3}; -2\sqrt{3})$, $(-\sqrt{3}; 2\sqrt{3})$; 8) $\left(3; \frac{3}{2}\right)$. **640.** 2) $x \leqslant \frac{22}{27}$; 4) $x>1$. **641.** 2) $x \leqslant 1$; 4) $x<3\frac{1}{6}$; 6) $x<2$. **642.** 2) $x \geqslant -1{,}5$; 4) $x \geqslant 3$. **643.** 2) 1; 2; 3; 4. **644.** 2) 2; 3; 4; 4) −1; 0; 1; 2; 3. **645.** −4; −3; −2. **646.** 2) $-1 \leqslant x \leqslant 3$; 4) $\frac{3-\sqrt{5}}{2} \leqslant x \leqslant \frac{3+\sqrt{5}}{2}$; 6) решений нет; 8) $x<-1\frac{1}{3}$, $x>1$. **647.** 2) $-1\frac{1}{3}<x<3\frac{1}{3}$; 4) $-1 \leqslant x \leqslant 3$. **648.** 2) $-4<x<2$; 4) $0<x<7$, $x>8$; 6) $x \leqslant -3$,

$-0,5 \leqslant x \leqslant 0,5$. **649.** 2) $9 > 4\sqrt{5}$; 4) $5\sqrt{6} < 6\sqrt{5}$; 6) $2\sqrt[6]{3} < \sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{5}$. **650.** -9. **651.** $x = 10$. **652.** 2) $x \leqslant -2\frac{2}{3}$, $x \geqslant 4$; 4) $x = -0,4$. **653.** 2) $x < -1$, $x > 1$; 4) $x < 0$, $x > 2$. **654.** 2) $x < 2$; 4) $-2 < x < 2$; 6) $-1 < x < 0$; 8) $x < -1$, $x > 1$. **655.** 2) $-5 < x < -1$, $x > 4$; 4) $x < 1$, $3 < x < 4$; 6) $-7 < x < -6$, $1 < x < 3$, $x > 8$. **657.** 62,5 и 57,5. **658.** 5 км/ч. **659.** 4 км/ч. **660.** 12,5 км/ч, 2,5 км/ч. **661.** 26 см, 2 см. **662.** 48 мин. **663.** 20 мин. **664.** 35 ц, 40 ц. **665.** 5 ч, 7 ч. **666.** 32 года и 8 лет. **667.** 40 м/мин^2. **668.** 2,5 км. **669.** ≈ 5 с. **670.** 4 км/ч, 16 км/ч. **671.** 75 км/ч. **672.** $16\frac{2}{3}$ м/с, 100 м. **673.** 2) Да; $(0; -4)$, $(8; 0)$, $y(-2) = -5$; 4) нет; $(0; 6)$, $(4; 0)$, $y(-2) = 3$. **676.** 2) $(5; -10)$; 4) $\left(\frac{5}{4}; -\frac{1}{8}\right)$. **677.** 2) 23; 4) $6\frac{1}{4}$. **678.** 2) $x_1 = -2$, $x_2 = -5$; 4) $x_1 = 0$, $x_{2,3} = \pm 1$. **680.** 2) $\sqrt[5]{-\frac{2}{9}} < \sqrt[5]{-\frac{1}{7}}$. **682.** $a = 8$, $b = 3$. **683.** $a = 0,3$, $b = -0,5$, $c = 0,2$. **688.** 2) Не является чётной и не является нечётной; 4) нечётная. **689.** 2) Да. **690.** 2) -1; 4) -1. **691.** -2. **692.** $-0,5$. **693.** 2) $a_1 = 201$, $S_{17} = 2737$. **694.** $n = 39$. **695.** 682. **696.** 2) 0,5; 4) $\frac{1}{16}$. **697.** 189. **698.** 2) $a_1 = 1$, $d = 3$; 4) $a_1 = 2$, $d = 3$ или $a_1 = 14$, $d = -3$; 6) $a_1 = 2$, $d = 3$ или $a_1 = 8$, $d = -3$. **699.** 2) -5. **700.** $a_1 = 1$, $d = -2$. **701.** 2) Да; 4) да. **702.** 2) 12 или -13; 4) $\frac{1}{12}$ или $-\frac{13}{12}$. **703.** $b_n = 3\left(-\frac{1}{6}\right)^{n-1}$ или $b_n = -3\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}$. **704.** $b_4 = 12$, $q = -2$ или $b_4 = -12$, $q = 2$. **705.** $\frac{1}{3}$; 1; 3; 9; 27 или $\frac{1}{3}$; -1; 3; -9; 27. **706.** 2) $b_1 = 0,384$, $q = 0,25$ или $b_1 = 0,6$, $q = -0,2$. **707.** 2) $b_1 = 37,5$, $q = 0,6$ или $b_1 = 48$, $q = 0,25$. **708.** 2) 341; 4) 341 или 121. **709.** 18; 5; 2 или 2; 5; 18. **710.** $x = 1$. **711.** 13 шахматистов. **712.** $\frac{a+4}{a-a^2-1}$. **713.** $x = 1$. **714.** 4. **715.** $m = -1$, $y < 0$ при $x > -\frac{1}{3}$. **716.** $(-3; 4)$. **717.** 32. **718.** Корней нет. **719.** $1 < x < 1\frac{1}{3}$. **721.** $x < -1$, $x > 5\frac{2}{3}$. **722.** $14\frac{6}{7}$. **723.** $\frac{x+5}{x+3}$. **724.** $\left(13\frac{1}{16}; -3,7\right)$. **726.** 960. **727.** $x = 4$. **728.** $x \leqslant -1$. **729.** 2. **730.** $170\frac{2}{3}$. **731.** $x_{1,2} = \pm\sqrt{2}$, $x_{3,4} = \pm i\sqrt{3}$. **732.** 0. **733.** $x_1 = 0$, $x_2 = 45$. **734.** 60 км/ч, 80 км/ч. **735.** $x = 1$. **736.** В третьем. **737.** $x > 2,5$. **738.** 1. **739.** 110. **741.** $x_1 = 7$, $x_2 = 12$. **742.** $(y-2)(5y-z)$. **743.** $\frac{a^3}{a-b}$. **744.** $x_1 = 3$, $x_2 = -3$. **745.** $\frac{1}{8}$. **746.** 25.

747. 0,2. **748.** $x < 0{,}5$, $x \geqslant 3$. **749.** (1; 1). **750.** $p = 2$, $q = 3$. **751.** 63. **752.** (2; 1). **753.** $\frac{2a-1}{a-2}$. **754.** $p = -1$, $q = -2$, $\left(\frac{1}{2}; -\frac{9}{4}\right)$, $-1 < x < 2$. **755.** $\frac{63}{8}$. **756.** $x = 2$, $x = 3$, $x = 4$. **757.** Да. **758.** $\frac{2a+1}{a+5}$. **759.** 60 км/ч, 40 км/ч. **760.** 33.

Задачи для внеклассной работы

776. $n = 1$. **777.** (4; 1), (4; –3), (–4; 1), (–4; –3). **778.** 7, 8, 9, 10. **783.** 1) $\sqrt{2}-1$; 2) $\sqrt{2}$; 3) $\frac{2}{2-x}$; 4) $\sqrt[6]{a}$. **784.** 1) $x_1 = -2$, $x_2 = 6$, $x_3 = 3 - \sqrt{21}$, $x_4 = 3 + \sqrt{21}$; 2) $x_1 = 2$, $x_2 = \frac{1}{2}$, $x_3 = 3$, $x_4 = \frac{1}{3}$; 3) $x = 15$; 4) $x_1 = 0$, $x_2 = 2$. **785.** 1) $x_1 = -4$, $x_2 = 1$; 2) $x = 3$. **786.** 1) (3; 2), (–2; –3); 2) (0; 0), (1; 2), (2; 1). **787.** 1) (–4; –5), (–5; –4), $(-1+2\sqrt{3}; -1+2\sqrt{3})$, $(-1-2\sqrt{3}; -1-2\sqrt{3})$, $(4+\sqrt{13}; 4-\sqrt{13})$, $(4-\sqrt{13}; 4+\sqrt{13})$; 2) (6; 6), $\left(\frac{3\sqrt{5}-3}{2}; -\frac{3\sqrt{5}+3}{2}\right)$, $\left(-\frac{3\sqrt{5}+3}{2}; \frac{3\sqrt{5}-3}{2}\right)$; 3) (1; 2), (–1; –2), $\left(\frac{9}{\sqrt{67}}; \sqrt{67}\right)$, $\left(-\frac{9}{\sqrt{67}}; -\sqrt{67}\right)$; 4) $\left(2+2\sqrt{3}; 1+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $\left(2-2\sqrt{3}; 1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$; 5) (0; 0), (2; 1), (–2; –1), (1; 2), (–1; –2); 6) (3; 1), $\left(\frac{1}{3}; -1\right)$. **789.** 1) (0,5; 5,5), (1,5; 5,5); 2) (1; 1); 3) (1; 2); 4) $(-2\sqrt{2}+\sqrt{3};$ $-2\sqrt{2}-\sqrt{3})$, $(2\sqrt{2}-\sqrt{3}; 2\sqrt{2}+\sqrt{3})$, $\left(\frac{5}{\sqrt{2}}; -\frac{7}{\sqrt{2}}\right)$, $\left(-\frac{5}{\sqrt{2}}; \frac{7}{\sqrt{2}}\right)$. **790.** 1) $r = 1$, $r = -1$; 2) $r = -2$. **791.** $-2{,}25 \leqslant a \leqslant -2$. **792.** $a = -\frac{1}{2}$. **793.** $-\frac{7+3\sqrt{5}}{2} \leqslant$ $\leqslant a \leqslant 2\sqrt{3} - 4$. **795.** $p = -2$, $q = -1$ или $p = 1$, q — любое. **796.** $-1 < r < 2$. **797.** $a < -2$. **806.** $(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)(x^4 - x^2 + 1)$. **807.** 1) $\frac{a+2}{a-1}$; 2) $\frac{a^2+1}{a-1}$. **809.** 1) $-\frac{1}{\sqrt{6}} < x < \frac{2}{5}$, $\frac{1}{\sqrt{6}} < x < 1$; 2) $x < -\frac{3\sqrt{7}}{2}$, $-3 < x < \frac{3\sqrt{7}}{2}$, $x > 4$; 3) $x < -2$, $-1 < x < 1$, $x > 2$; 4) $-3 < x < -2$, $-1 < x < 1$, $3 < x < 5$; 5) $3 \leqslant x \leqslant 6$; 6) $2 < x < 4$. **810.** 1) $-1 \leqslant x < -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{2} < x \leqslant 1$; 2) $-2 \leqslant x < -\frac{8}{5}$, $0 < x \leqslant 2$; 3) $-2 < x \leqslant 0$, $x \geqslant 6$; 4) $0 < x \leqslant \frac{4}{3}$; 5) $x < -\frac{3}{2}$, $x > \frac{7}{10}$; 6) $-2 < x < 1$, $x > 1$. **811.** 3, 8, 13 или 18, 8, –2. **812.** 4092 или $\frac{1023}{2}$. **813.** 3, 6, 12, 18 или $\frac{75}{4}$, $\frac{45}{4}$, $\frac{27}{4}$, $\frac{9}{4}$. **818.** $S_n = \frac{1-(n-2)x^{n+1}+(n+1)x^{n+2}}{(1-x)^2}$, если $x \neq 1$; $S_n = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$, если $x = 1$. **819.** $\frac{2}{3}\left(\frac{10^{n+1}-10}{9} - n\right)$. **820.** 1) $x_n = a^{n-1}x_1 + b\frac{a^{n-1}-1}{a-1}$ при $a \neq 1$, $x_n = x_1 + (n-1)b$ при $a = 1$;

2) $S_n=\frac{(n-1)b}{1-a}+\frac{ab(a^{n-1}-1)}{(1-a)^2}+\frac{1-a^n}{1-a}$ при $a\neq 1$, $S_n=\left(x_1+\frac{(n-1)b}{2}\right)n$ при $a=1$. **821.** $x_n=(n-1)x_2-(n-2)x_1+\frac{(n-2)(n-1)}{2}$. **822.** 1. **823.** $x_n=\frac{\alpha^{n-1}-\beta^{n-1}}{\alpha-\beta}x_2-\alpha\beta x_1\frac{\alpha^{n-2}-\beta^{n-2}}{\alpha-\beta}$. **824.** $\frac{2ab}{b-a}$ ч. **825.** 48 мин. **826.** 1040 г. **827.** 1 ч. **828.** $\frac{s}{2t}$ м/мин. **829.** 4 км. **830.** $\frac{15}{8}$. **831.** 7 км. **832.** $\frac{1}{6t}(4s-3at+\sqrt{9a^2t^2+16s^2})$. **833.** $\frac{4}{3}$. **834.** 27%. **835.** 24 м^3. **836.** 80 км/ч. **837.** 4 ч. **838.** 1 ч, $\frac{\sqrt{457}-7}{4}$ ч. **839.** 0,3 ч. **840.** $\frac{b+\sqrt{b^2+4ab}}{2}$ км. **841.** 4 ч 42 мин. **842.** 2 ч. **843.** 6 ч.

Ответы к заданиям «Проверь себя!»

Глава I. 1. Частное x^2-2, остаток 5. 2. $x_1=-1$, $x_2=2$, $x_3=-3$. 3. 1) (2; 5), (5; 2); 2) (–1; 2), (–40; –11). 4. $\frac{3}{4}$; $\frac{4}{3}$.

Глава II. 1. 1) $8\frac{3}{8}$; 2) 16; 3) $1\frac{1}{5}$. 2. $8{,}6\cdot10^3$; $7{,}8\cdot10^{-3}$; $6{,}708\cdot10^1$; $1{,}1\cdot10^6$. 3. 1) 6; 2) $(y+x)xy$. 4. $a^{\frac{3}{4}}$; 27. 5. $(0{,}78)^{\frac{2}{3}}>(0{,}67)^{\frac{2}{3}}$; $(3{,}09)^{-\frac{1}{3}}<(3{,}08)^{-\frac{1}{3}}$.

Глава III. 1. 1) $x\neq1$; 2) $-3\leqslant x\leqslant 3$. 2. а) 1) $y\approx1{,}4$; 2) $y=3$; 3) $y=-2{,}5$; 4) $y=8$; б) 1) $x=9$; 2) $x=2$; 3) $x=-\frac{5}{3}$; 4) $x\approx1{,}4$; в) $y(x)>0$ при: 1) $x>0$; 2) $x>0$; 3) $x<0$; 4) $x>0$; $y(x)<0$ при: 1) нет таких промежутков; 2) $x<0$; 3) $x>0$; 4) $x<0$; г) функция возрастает при: 1) $x\geqslant0$; 2) нет таких промежутков; 3) $x>0$, $x<0$; 4) $x\in\boldsymbol{R}$; функция убывает при: 1) нет таких промежутков; 2) $x>0$, $x<0$; 3) нет промежутков; 4) нет промежутков. 3. 1) Чётная; 2) нечётная. 4. 1) $x=28$; 2) $x=1$.

Глава IV. 1. 0, 1, 3. 2. $a_{10}=-25$, $S_{10}=-115$. 3. $b_6=\frac{1}{8}$, $S_6=7\frac{7}{8}$. 4. $q=\frac{1}{3}$, $S_5=\frac{121}{81}$.

Глава V. 1. 1) $\frac{1}{5}$; 2) $\frac{3}{10}$; 3) $\frac{1}{2}$; 4) $\frac{4}{5}$. 2. $\frac{1}{18}$.

Глава VI. 1.

X	2	3	4	5
M	3	7	8	2
W	$\frac{3}{20}$	$\frac{7}{20}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{10}$

2. $R=10$, $\overline{Y}=Mo=Me=3$.

Глава VII. 1. 1) {–2; –1; 0; 1; 2; 3}, {0: 1}; 2) [–7; 2], [–3; 1]. 2. 1) $100\leqslant32$; число 3 не является чётным. 3. $(x+2)^2+(y-5)^2=49$. 4. $\sqrt{13}$.

Указания к решениям и решения задач раздела «Задачи для внеклассной работы»

761. Так как данное число a не делится на 3, то $a = 3n + 1$ или $a = 3n - 1$, откуда $a^2 = 3m + 1$, где m — натуральное число. **762.** Воспользоваться решением задачи **761.** **763.** 1) $10^{70} - 361 = 10^{70} - 1 - 9 \cdot 40 = \underbrace{99\ldots9}_{70\ \text{цифр}} - 9 \cdot 40$; 2) $10^{80} - 298 = \underbrace{99\ldots99}_{40\ \text{пар}} - 11 \cdot 27$; 3) число $91^{50} - 19^{75} = (18 \cdot 5 + 1)^{50} - (18 + 1)^{75}$ делится на 18, так как при делении на 18 произведения $(18m + 1)(18n + 1)$, где m и n — натуральные числа, получается остаток, равный 1; 4) данное число равно $(4 \cdot 19 - 1)^{26} \cdot (5 \cdot 19 - 1)^{26} + (2 \cdot 19 + 1)^{25} \cdot (3 \cdot 19 - 1)^{25}$, при делении на 19 остаток от деления первого слагаемого равен 1, а второго равен -1. **764.** Остаток от деления на 9 натурального числа равен остатку от деления на 9 суммы цифр этого числа. Так как суммы цифр данного числа a и числа $5a$ одинаковы, то при делении на 9 чисел $5a$ и a получается один и тот же остаток, а их разность $4a$ делится на 9, откуда следует, что a делится на 9 (4 не делится на 9). **765.** По условию $m = 1 + p \cdot 3^n$, где p — натуральное число. Поэтому число $m^3 - 1 = (m - 1)(m^2 + m + 1) = p \cdot 3^n (m^2 + m + 1)$ делится на 3^{n+1}, так как $m^2 + m + 1$ делится на 3. **766.** При любых целых x и y числа $x + y$ и $x - y$ либо оба делятся на 2, либо оба не делятся на 2. В первом случае их произведение делится на 4, а число 1982 не делится на 4; во втором случае $(x + y)(x - y)$ не делится на 2, а 1982 делится на 2. **767.** Если существуют натуральные числа x и y, такие, что верно равенство $mx + ny = mn$, где m и n — взаимно простые числа, то $ny = m(n - x)$ и число y должно делиться на m, т. е. $y = mk$, где k — натуральное число. Тогда $mx + ny = mx + mkn = mn$, откуда $x + kn = n$, что невозможно ($x \geqslant 1$, $k \geqslant 1$). **768.** Если n делится на 3, то остаток от деления на 3 числа $a = 7n^2 + 1$ равен 1, а если число n не делится на 3, то остаток от деления числа a на 3 равен 2 (см. задачу **761**). **769.** Если равенство $15x^2 = 9 + 7y^2$ является верным при некоторых целых x и y, то $15x^2 - 9 = 7y^2$, откуда следует, что y делится на 3, т. е. $y = 3m$, где m — целое число. Тогда $15x^2 = 9 + 63m^2$ или $5x^2 = 3 + 21m^2$, и поэтому x делится на 3, т. е. $x = 3p$. Следовательно, $45p^2 = 3 + 21m^2$ или $15p^2 = 1 + 7m^2$, что невозможно (см. задачу **761**). **770.** Так как число $m^3 - m = (m - 1)\, m\, (m + 1)$ делится на 6, то остатки от деления на 6 чисел m^3 и m равны, и поэтому остатки от деления на 6 чисел $m^3 + n^3 + k^3$ и $m + n + k$ также равны. **771.** Если число m не делится на 5, т. е. $m = 5k + r$, где k — неотрицательное целое число, r — одно из чисел 1, 2, 3, 4, то $m^4 = 5p + r^4 = 5q + 1$ (p и q — целые числа). **772.** 1) Число $m^6n^2 - n^6m^2 = m^2n^2(m^4 - n^4) = m^2n^2(m^2 - n^2)(m^2 + n^2)$ делится на 2 (если m и n — нечётные числа, то $m^2 - n^2$ — чётное число). 2) Если оба числа m, n не делятся на 3, то число $m^2 - n^2$ делится на 3 (см. задачу **761**). 3) Если оба числа m, n не делятся на 5, то число $m^4 - n^4$ делится на 5 (см. задачу **771**). **773.** $\frac{(n+1)^4 + n^4 - 1}{2} = n^4 + 2n^3 + 3n^2 + 2n = n^3(n + 1) + n^2(n + 1) + 2n(n + 1) = n(n + 1)(n^2 + n + 2) = n(n + 1)(n(n + 1) + 2)$. **774.** 1) Если $m \leqslant n$, то левая часть меньше или равна $n(n + 1)$. При $m \geqslant n + 1$ левая часть больше или равна $(n+1)(n+2)$. 2) Равенство записать в виде $m(m+1) = n^4 + 2n^3 + 3n^2 + 2n = n(n+1)(n(n+1)+2)$, используя результат задачи **773**. Далее воспользоваться задачей **774** (1). **775.** $n^3 + 6n^2 + 15n + 15 = n^3 + 6n^2 + 12n + 8 + 3(n+2) + 1 = (n+2)^3 + 3(n+2) + 1$. **776.** $a = n^4 + n^2 + 1 = (n^2+1)^2 - n^2 = (n^2+n+1)(n^2-n+1)$. Если a — простое число, то $n^2 - n + 1 = 1$, откуда $n = 1$. **777.** Записать уравнение в виде $(x+y+1)(x-y-1) = 12$ и воспользоваться тем, что множители $x+y+1$ и $x-y-1$ — чётные числа (их разность — чётное число, правая часть уравнения — чётное число). Задача сводится к решению следующих систем:

$$\begin{cases} x+y+1=2, \\ x-y-1=6; \end{cases} \quad \begin{cases} x+y+1=6, \\ x-y-1=2; \end{cases} \quad \begin{cases} x+y+1=-2, \\ x-y-1=-6; \end{cases} \quad \begin{cases} x+y+1=-6, \\ x-y-1=-2. \end{cases}$$

778. Произведение четырёх последовательных натуральных чисел записать так: $(n^2+3n)(n^2+3n+2)$. Задача сводится к решению квадратного уравнения $t(t+2) = 5040$, где $t = n^2 + 3n$. **779.** Если $P(x) = mx^3 + nx^2 + px + q$, то $P(0) = q$, $P(1) = m + n + p + q$, $P(-1) = -m + n - p + q$, $P(2) = 8m + 4n + 2p + q$ — числа, кратные 5. Тогда число $P(1) + P(-1) = 2n + 2q$ делится на 5, и поэтому n делится на 5. Далее на 5 делятся числа $P(2) - 2P(-1) = 10m + 2n + 4p - q$, $10m$, n и q, откуда следует, что $4p$ (а значит, и p) делится на 5. Наконец, m делится на 5, так как числа $P(1) = m + n + p + q$, n, p и q делятся на 5. **780.** Если $D = b^2 - 4ac = 63$, то b — нечётное число, т. е. $b = 2k - 1$. Тогда $(2k-1)^2 - 4ac = 63$ или $2(k^2 - k - ac) = 31$, что невозможно. **781.** 1) Использовать равенства $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$, $k = 1, 2, \ldots, n$. 2) Использовать равенства $\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)}\right)$, $k = 1, 2, \ldots, n$. 782. 1) Будем рассматривать равенство как уравнение вида $Ax^2 + Bx + C = 0$. Так как это уравнение имеет три различных корня ($x = a$, $x = b$, $x = c$), то $A = B = C = 0$ и равенство является верным при всех значениях x. 2) Левая часть равенства совпадает с правой при $x = a$, $x = b$, $x = c$. Два многочлена не выше второй степени тождественно равны, если они принимают равные значения в трёх различных точках. **783.** 1) Записать знаменатель в виде $\sqrt{2} + \sqrt{3} + 2 + \sqrt{2}(\sqrt{2} + \sqrt{3} + 2)$ и использовать равенство $\frac{1}{\sqrt{2}+1} = \sqrt{2} - 1$. 2) Записать данное выражение в виде $\frac{\sqrt{2}(2-\sqrt{3})}{2-\sqrt{4-2\sqrt{3}}} + \frac{\sqrt{2}(2+\sqrt{3})}{2+\sqrt{4+2\sqrt{3}}}$ и воспользоваться равенствами $4 - 2\sqrt{3} = (\sqrt{3}-1)^2$, $4 + 2\sqrt{3} = (\sqrt{3}+1)^2$. Далее привести дроби к общему знаменателю. 3) Воспользоваться равенствами $x - 2\sqrt{x-1} = (\sqrt{x-1} - 1)^2$, $x + 2\sqrt{x-1} = (\sqrt{x-1} + 1)^2$, $\sqrt{x^2 - 4x + 4} = 2 - x$ при $1 < x < 2$. 4) Воспользоваться формулами для разности квадратов, суммы и разности кубов двух чисел. **784.** 1) Свести уравнение к квадратному относительно $t = \frac{x}{3} - \frac{4}{x}$. 2) Записать уравнение в виде $6\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 35\left(x + \frac{1}{x}\right) + 62 = 0$ и свести к квадратному относительно $t = x + \frac{1}{x}$. 3) Полагая $\sqrt{2x-5} = 2t$, записать уравнение в виде

$\sqrt{(2t+1)^2}+\sqrt{(2t+3)^2}=14,\ \ t\geqslant 0.$ 4) Полагая $x^2-2x+4=t,$ записать уравнение в виде $2\sqrt{t}-\sqrt{t+5}=1.$ **785.** 1) Свести уравнение к квадратному относительно $t=x^2+3x.$ 2) Полагая $x-3=t,$ получить уравнение $t(t^2+6t+21)=0.$ **786.** 1) Разделить первое уравнение на второе. После преобразований получится квадратное уравнение относительно $t=\dfrac{x}{y}.$

2) Второе уравнение, записанное в виде $4(x+y)^2=9x^2y^2$, распадается на два уравнения: $2(x+y)=3xy$ и $2(x+y)=-3xy$. Далее ввести новые неизвестные: $u=x+y,\ v=xy$. **787.** 1) Система распадается на две системы:

$$\begin{cases}x-y=0,\\(x+1)(y+1)=12;\end{cases}\qquad\begin{cases}x^2+xy+y^2=61,\\xy+x+y=11.\end{cases}$$

Сложив уравнения второй системы, получим квадратное уравнение относительно $t=x+y.$ 2) $x+y=u,\ \ xy=v.$ 3) Умножить первое уравнение на -4, а второе на 3 и сложить. Получится квадратное уравнение относительно xy. 4) $\dfrac{xy}{x+2y}=u,\ \dfrac{xy}{x-2y}=v.$ 5) $x+y=u,\ xy=v.$ 6) Возвести оба уравнения в квадрат и сложить. В результате получится уравнение $(x^2-1)(y^2-1)=0$, откуда $y^2=1$, так как $x^2\neq 1$ в силу второго уравнения исходной системы. **788.** Если система имеет действительное решение, то при возведении в квадрат первого уравнения получаем $x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)=0$, а второе уравнение можно записать в виде $xy+yz+zx=0$. Следовательно, $x^2+y^2+z^2=0$, откуда $x=y=z=0$, что невозможно. **789.** 1) Из системы следует, что $|y-5|+y-5=1$. Это уравнение не имеет решений при $y<5$, а при $y\geqslant 5$ получаем $y=5{,}5$, и тогда $|x-1|=\dfrac{1}{2}.$ 2) Вычитая из второго уравнения системы первое, находим $y+\sqrt{2y-x}=\sqrt{5y-x}$. Возводя обе части полученного уравнения в квадрат, находим $y(y-3+2\sqrt{2y-x})=0.$ 3) Полагая $y-x=u,$ запишем систему в виде $\begin{cases}\sqrt{u+3x}=1+u,\\\sqrt{u+8x}=4-u.\end{cases}$ Возводя в квадрат обе части каждого из уравнений системы и исключая затем x из полученной системы, придём к уравнению $u^2+7u-8=0.$ 4) Возводя в квадрат обе части каждого из уравнений и складывая полученные уравнения, находим

$$76-2(x^2+y^2)=(x+y)^2. \tag{1}$$

Перемножив почленно уравнения, получим $y^2-x^2=\sqrt{8(16+(x+y)^2)},$ откуда

$$(x-y)^2(x+y)^2=8(16+(x+y)^2). \tag{2}$$

Полагая в (1) и (2) $(x+y)^2=u,\ \ (x-y)^2=v,$ придём к системе $\begin{cases}2u+v=76,\\uv=8(u+16).\end{cases}$ **790.** 1) $D=(4+2r)^2-4(5+4r)=4(r^2-1)=0;$ 2) x_1+

$+ x_2 = -(4+2r) = 0,\quad D > 0.$ **791.** Корни уравнения $x^2 + px + q = 0$ неотрицательны тогда и только тогда, когда выполняются условия $p \leqslant 0$, $q \geqslant 0$, $p^2 - 4q \geqslant 0$. Задача сводится к решению системы неравенств $\begin{cases} \dfrac{a+3}{a} \leqslant 0, \\ \dfrac{a+2}{a} \geqslant 0, \\ \dfrac{(a+3)^2}{a^2} - \dfrac{a+2}{a} \geqslant 0. \end{cases}$ При $a = 0$ уравнение имеет один отрицательный корень. **792.** $D = a^2 - 4a > 0$, $x_1^2 x_2 = a x_1 = a^2$; $a \neq 0$ (если $a = 0$, то $x_1 = x_2 = 0$). **793.** Ветви параболы $y = x^2 + ax + a^2 + 6a$ направлены вверх; $y < 0$ при всех $x \in (1; 2)$ тогда и только тогда, когда $y(1) = a^2 + 7a + 1 \leqslant 0$ и $y(2) = a^2 + 8a + 4 \leqslant 0$. **794.** Если $a = 0$, то уравнение имеет действительный корень, так как $bc + c^2 \leqslant 0$. Если $a \neq 0$, то парабола $y = ax^2 + bx + c$ пересекает ось Ox, так как $c(a + b + c) = y(0)\,y(1) \leqslant 0$. **795.** $x_1 + x_2 = -p$, $x_1 x_2 = q$, $(x_1 + 1) + (x_2 + 1) = p^2$, $(x_1 + 1)(x_2 + 1) = pq$; $-p + 2 = p^2$, $q - p + 1 = pq$. **796.** Так как $x^2 - x + 1 > 0$ при всех $x \in \boldsymbol{R}$, то исходное неравенство сводится к системе неравенств $\begin{cases} x^2 - (r+2) + 4 > 0, \\ 4x^2 + (r-3)\,x + 1 > 0. \end{cases}$ Далее воспользоваться тем, что квадратичная функция $y = ax^2 + bx + c$ принимает положительные значения при всех $x \in \boldsymbol{R}$ тогда и только тогда, когда выполняются неравенства $a > 0$, $D = b^2 - 4ac < 0$. Задача сводится к решению системы неравенств $\begin{cases} (r+2)^2 - 16 < 0, \\ (r-3)^2 - 16 < 0, \end{cases}$ которую можно записать так: $\begin{cases} |r+2| < 4, \\ |r-3| < 4. \end{cases}$ **797.** Задача сводится к решению системы неравенств $\begin{cases} a < 0, \\ (a+2)^2 - 2a^2 - 4a < 0. \end{cases}$ **798.** 1) $x^2 + 4y^2 - 2x - 16y + 17 = (x-1)^2 + 4(y-2)^2$; 2) $5x^2 - 4xy + y^2 - 16x + 6y + 13 = (y - 2x + 3)^2 + (x-2)^2$. **799.** 1) $a^2 + b^2 + c^2 - 2a + 4b - 6c + 14 = (a-1)^2 + (b+2)^2 + (c-3)^2$. 2) Исходное неравенство, записанное в виде $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac \geqslant 0$, является верным, так как его левая часть равна $\dfrac{1}{2}((a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2)$.

3) Исходное неравенство можно записать в виде $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant ab + bc + ac$. **800.** 1) Левая часть неравенства содержит n слагаемых, каждое из которых (кроме последнего) больше последнего. 2) Воспользоваться неравенством $1 + \dfrac{1}{n} < 1 + \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{4n^2} = \left(1 + \dfrac{1}{2n}\right)^2$. **801.** 1) Воспользоваться равенством $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = \dfrac{1}{2}(a + b + c)((a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2)$. 2) Используя неравенство $\dfrac{x+y+z}{3} \geqslant \sqrt{xyz}$, справедливое при любых неотрицательных x, y, z (задача **801**, 1), получить неравенства

$$a + b + c \geqslant 3\sqrt[3]{abc}, \quad ab + bc + ca \geqslant 3\sqrt[3]{a^2 b^2 c^2}.$$

3) Перемножить неравенства

$$a + b \geqslant 2\sqrt{ab}, \quad b + c \geqslant 2\sqrt{bc}, \quad c + a \geqslant 2\sqrt{ac}.$$

4) Полагая $x = \frac{b + c - a}{2}$, $y = \frac{c + a - b}{2}$, $z = \frac{a + b - c}{2}$, запишем неравенство в виде

$$8xyz \leqslant abc. \quad (1)$$

Пусть хотя бы одно из чисел x, y, z (например, x) отрицательно, тогда $a > b + c$, откуда $a \geqslant b$, $a \geqslant c$ (по условию $b \geqslant 0$, $c \geqslant 0$), $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$, $xyz \leqslant 0$ и неравенство (1) является верным. Если $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$, то, используя неравенство

$$(x + y)(x + z)(y + z) \geqslant 8xyz, \quad (2)$$

доказанное в задаче **801**, 3), и учитывая, что $x + y = c$, $y + z = a$, $x + z = b$, установим, что из (2) следует неравенство (1). **802.** 1) Воспользоваться неравенствами $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geqslant \frac{2}{\sqrt{ab}}$, $\frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geqslant \frac{2}{\sqrt{bc}}$, $\frac{1}{c} + \frac{1}{a} \geqslant \frac{2}{\sqrt{ac}}$.
2) Полагая $x = a + b$, $y = b + c$, $z = a + c$, записать неравенство в виде $(x + y + z)(xy + xz + yz) \geqslant 9xyz$ и воспользоваться результатом задачи **801**, 2).
803. Возводя обе части исходного неравенства в квадрат, получаем неравенство $\frac{ad + bc}{2} \geqslant \sqrt{abcd}$, которое является верным, так как для любых положительных чисел x, y справедливо неравенство $\frac{x + y}{2} \geqslant \sqrt{xy}$.
804. Воспользоваться неравенствами $1 + a \geqslant 2\sqrt{a}$, $1 + b \geqslant 2\sqrt{b}$, $1 + c \geqslant 2\sqrt{c}$.
805. Если $x \leqslant 0$, то $P(x) = x^{12} - x^9 + x^4 - x + 1 \geqslant 1$. Если $0 < x < 1$, то $P(x) = 1 - x + x^4(1 - x^5) + x^{12} > 0$. Если $x \geqslant 1$, то $P(x) = x^9(x^3 - 1) + x(x^3 - 1) + 1 \geqslant 1$. **806.** $x^8 + x^4 + 1 = (x^4 + 1)^2 - x^4 = (x^4 + x^2 + 1) \times (x^4 - x^2 + 1)$, $x^4 + x^2 + 1 = (x^2 + 1)^2 - x^2 = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$.
807. 1) $a^3 - 2a^2 + 5a + 26 = a^3 + 2a^2 - 4(a^2 + 2a) + 13(a + 2) = (a + 2) \times (a^2 - 4a + 13)$, $a^3 - 5a^2 + 17a - 13 = a^3 - a^2 - (4a^2 - 4a) + 13(a - 1) = (a - 1)(a^2 - 4a + 13)$. 2) $2a^4 + a^3 + 4a^2 + a + 2 = a^2(2a^2 + a + 2) + 2a^2 + a + 2 = (2a^2 + a + 2)(a^2 + 1)$, $2a^3 - a^2 + a - 2 = 2a^2(a - 1) + a^2 + a - 2 = (a - 1)(2a^2 + a + 2)$.

808. 1) $y = \begin{cases} -2x - 2, & \text{если } x < -4, \\ 6, & \text{если } -4 \leqslant x \leqslant 2, \\ 2x + 2, & \text{если } x > 2. \end{cases}$ График изображён на рисунке 70.

2) $y = \begin{cases} 2, & \text{если } x < 1, \\ 4 - 2x, & \text{если } 1 \leqslant x \leqslant 3, \\ -2, & \text{если } x > 3. \end{cases}$ График изображён на рисунке 71.

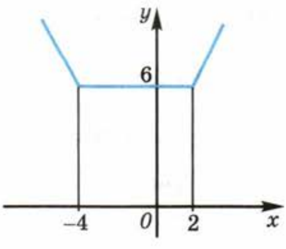


Рис. ***70***

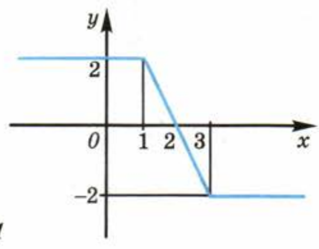


Рис. ***71***

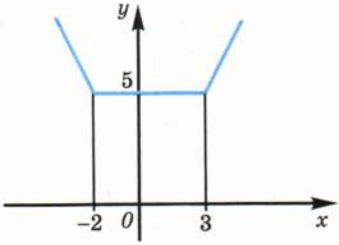


Рис. ***72***

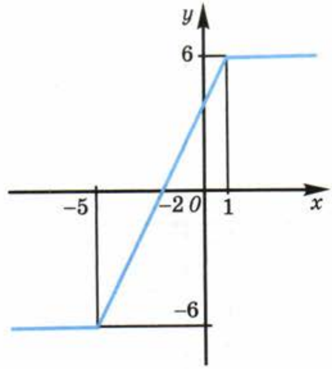


Рис. ***73***

3) $y=\sqrt{(x+2)^2}+\sqrt{(x-3)^2}=|x+2|+|x-3|=\begin{cases}1-2x, & \text{если } x<-2,\\ 5, & \text{если } -2\leqslant x\leqslant 3,\\ 2x-1, & \text{если } x>3.\end{cases}$

График изображён на рисунке 72. 4) $y=\begin{cases}-6, & \text{если } x<-5,\\ 2x+4, & \text{если } -5\leqslant x\leqslant 1,\\ 6, & \text{если } x>1.\end{cases}$ График изображён на рисунке 73. 5) $y=-3+\dfrac{1}{1-x}$ при $x<1$ и $y=3+\dfrac{1}{x-1}$ при $x>1$. График изображён на рисунке 74. 6) Функция чётная, $y=2+\dfrac{7}{x-4}$ при $x>0$. График изображён на рисунке 75. 7) $y=\dfrac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{9}{4}}=\dfrac{1}{(x+1)(x-2)}$. График симметричен относительно прямой $x=\frac{1}{2}$, изображён на рисунке 76. 8) Функция чётная,

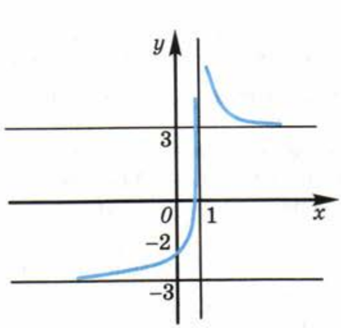


Рис. ***74***

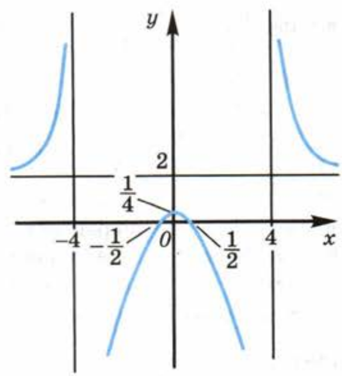


Рис. ***75***

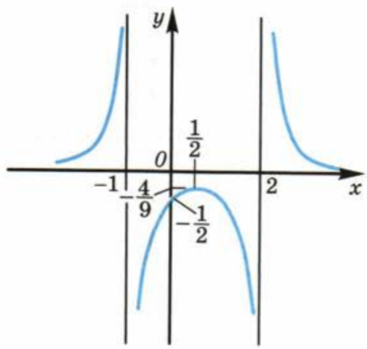


Рис. **76**

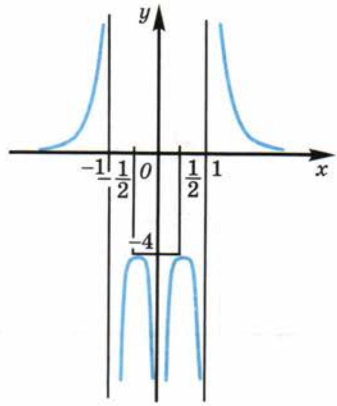


Рис. **77**

$y = \dfrac{1}{\left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 - \dfrac{1}{4}} = \dfrac{1}{x(x-1)}$ при $x > 0$. График изображён на рисунке 77.

809. 1) Записать неравенство в следующем виде: $\dfrac{\left(x + \dfrac{1}{\sqrt{6}}\right)\left(x - \dfrac{1}{\sqrt{6}}\right)}{\left(x - \dfrac{2}{5}\right)(x-1)} < 0.$

При решении этого неравенства методом интервалов учесть, что $\dfrac{1}{\sqrt{6}} > \dfrac{2}{5}$, так как $\dfrac{1}{6} > \dfrac{4}{25}$. 2) Преобразовать исходное неравенство к виду $\dfrac{\left(x + \dfrac{3\sqrt{7}}{2}\right)\left(x - \dfrac{3\sqrt{7}}{2}\right)}{(x+3)(x-4)} > 0$. 3) Исходное неравенство можно записать в виде $\dfrac{(x^2-4)(x^2+1)}{(x^2+9)(x^2-1)} > 0$, откуда $\dfrac{(x+2)(x-2)}{(x+1)(x-1)} > 0$. 4) $x^3 - 5x^2 - x + 5 = x^2(x-5) - (x-5) = (x-5)(x^2-1)$, $x^3 + 2x^2 - 9x - 18 = x^2(x+2) - 9(x+2) = (x+2)(x^2-9)$. Поэтому исходное неравенство можно записать в виде $\dfrac{(x+1)(x-1)(x-5)}{(x+3)(x+2)(x-3)} < 0$. 5) Если $x < 2$, то неравенство является неверным. Если $2 \leqslant x \leqslant 4$, то неравенство можно записать в виде $x^2 - x - 6 \geqslant 0$. Если $x > 4$, то неравенство преобразуется к виду $(x-1)(x-6) \leqslant 0$. 6) Число $x = -1$ не является решением неравенства, а при $x \neq -1$ исходное неравенство можно записать так: $|x - 3| < 1$. **810.** 1) Неравенство имеет смысл, если $|x| \leqslant 1$, и его можно последовательно преобразовать так: $\sqrt{1-x^2} < \dfrac{1}{2}$, $x^2 > \dfrac{3}{4}$, $|x| > \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. 2) Неравенство имеет смысл $|x| \leqslant 2$, и его можно преобразовать к виду $5x^2 + 8x > 0$. 3) Значения x, такие, что $x \leqslant -4$, не являются решениями неравенства. Если $x \geqslant -4$ и $x^2 - 6x \geqslant 0$, то неравенство можно последовательно преобразовать так: $x^2 - 6x < (8 + 2x)^2$, $(3x + 32)(x + 2) > 0$. 4) Если $x \geqslant \frac{2}{3}$, то исходное неравенство является верным для x, таких, что $9x^2 - 9x - 4 \leqslant 0$. Если $x < \frac{2}{3}$ и $9x^2 - 9x - 4 \leqslant 0$, т. е. при $x \in \left(-\frac{1}{3};\ \frac{2}{3}\right)$, то исходное неравенство можно заменить каждым из неравенств $(2 - 3x)^2 < 4 + 9x - 9x^2$, $x(6x - 7) < 0$. 5) Неравенство имеет смысл при $x < -\frac{3}{2}$ и при $x > \frac{1}{3}$. При $x < -\frac{3}{2}$ неравенство является верным, а при $x > \frac{1}{3}$ его можно заменить каждым из неравенств $\sqrt{\frac{2x+3}{3x-1}} < 2$, $\frac{2x+3}{3x-1} < 4$, $\left(x - \frac{7}{10}\right)\left(x - \frac{1}{3}\right) > 0$. 6) Неравенство имеет смысл при всех x, таких, что $x \geqslant -3$, $x \neq 1$. Если $x \in [-3;\ 1)$, то исходное неравенство можно заменить каждым из неравенств $3\sqrt{x+3} > x + 5$, $9(x + 3) > (x + 5)^2$, $(x + 2)(x - 1) < 0$. Если $x > 1$, то исходное неравенство преобразуется к виду $(x + 2)(x - 1) > 0$. **811.** По свойствам прогрессий искомые числа x, y, z удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} x + z = 2y, \\ (x+2)(z+7) = (y+2)^2, \\ x + y + z = 24. \end{cases}$$

Исключив из этой системы x и y, получим уравнение $z^2 - 11z - 26 = 0$. **812.** Искомые числа x, y, z удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} x + y + z = 28, \\ xz = y^2, \\ (x-1) + (z-9) = 2(y-3), \end{cases}$$

откуда следует, что $x^2 - 20x + 64 = 0$. **813.** Искомые числа x, y, z, t удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} xz = y^2, \\ y + t = 2z, \\ x + t = 21, \\ y + z = 18, \end{cases}$$

откуда следует, что $4y^2 - 69y + 270 = 0$, $y_1 = 6$, $y_2 = \frac{45}{4}$. **814.** Нужно доказать, что

$$\frac{2}{\sqrt{c} + \sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{b} + \sqrt{c}} + \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}, \qquad (1)$$

если $b - a = c - b = d$, т. е. $c - a = 2d$ (d — разность исходной арифметической прогрессии). Если $d = 0$, то $a = b = c$ и равенство (1) является верным. Если $d \neq 0$, то правая часть (1) равна $\frac{\sqrt{c} + \sqrt{b}}{c - b} + \frac{\sqrt{b} - \sqrt{a}}{b - a} = \frac{\sqrt{c} - \sqrt{a}}{d} = A$.

Левая часть (1) также равна A, так как $\frac{2}{\sqrt{c} + \sqrt{a}} = \frac{2(\sqrt{c} - \sqrt{a})}{c - a} = \frac{\sqrt{c} - \sqrt{a}}{d}$.

815. Если d — разность арифметической прогрессии, S — левая часть равенства и $d \neq 0$, то

$$S = \frac{\sqrt{a_2} - \sqrt{a_1}}{a_2 - a_1} + \frac{\sqrt{a_3} - \sqrt{a_2}}{a_3 - a_2} + \ldots + \frac{\sqrt{a_n} - \sqrt{a_{n-1}}}{a_n - a_{n-1}} = \frac{\sqrt{a_n} - \sqrt{a_1}}{d},$$

так как $a_k - a_{k-1} = d$ при $k = 2, 3, \ldots, n$. Правую часть равенства можно преобразовать так: $\dfrac{n-1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_n}} = \dfrac{(n-1)(\sqrt{a_n} - \sqrt{a_1})}{a_n - a_1} = \dfrac{\sqrt{a_n} - \sqrt{a_1}}{d}$.

816. Пусть d — разность арифметической прогрессии. 1) Тогда из равенства $S_n = S_m$ следует, что

$$a_1 + \frac{d}{2}(n + m + 1) = 0, \tag{1}$$

так как $n \neq m$ (при $n = m$ задача не имеет смысла). С другой стороны, $S_{m+n} = \left(a_1 + \dfrac{m+n-1}{2} \cdot d\right)(m + n)$ и из (1) следует, что $S_{m+n} = 0$. 2) Из равенства $\dfrac{S_m}{S_n} = \dfrac{m^2}{n^2}$ следует, что $\dfrac{2a_1 + d(m-1)}{2a_1 + d(n-1)} = \dfrac{m}{n}$ или

$$2a_1(n - m) = d(n - m). \tag{2}$$

Если $n = m$, то равенство $\dfrac{a_m}{a_n} = \dfrac{2m-1}{2n-1}$ является верным. Если $n \neq m$, то из (2) следует, что $2a_1 = d$ и тогда $\dfrac{a_m}{a_n} = \dfrac{a_1 + d(m-1)}{a_1 + d(n-1)} = \dfrac{2m-1}{2n-1}$.

3) $S_{n+3} - S_n = a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3}$, $S_{n+2} - S_{n+1} = a_{n+2}$, $a_{n+1} + a_{n+3} = 2a_{n+2}$.

4) $$\frac{a_k + a_{2k+n}}{2} = a_{n+k}. \tag{3}$$

Полагая в (3) $k = 1, 2, \ldots, n$ и складывая соответствующие равенства, получаем $\dfrac{S_n + S_{3n} - S_{2n}}{2} = S_{2n} - S_n$. **817.** 1) $S_{n+k} = S_n + q^n(b_1 + b_1q + \ldots + b_1q^{k-1}) = S_n + q^nS_k$, где b_1 — первый член, q — знаменатель геометрической прогрессии. 2) $S_{2n} - S_n = q^nS_n$, $S_{3n} - S_{2n} = q^{2n}S_n$. **818.** $S_n(1 - x) = 1 + x + \ldots + x^n - (n+1)x^{n+1} = \dfrac{1 - x^{n+1}}{1 - x} - (n+1)x^{n+1}$. **819.** $S_n = 6 + 66 + \ldots + \underbrace{666\ldots6}_{n\ \text{цифр}} = \dfrac{6}{9}(9 + 99 + \ldots + \underbrace{999\ldots9}_{n\ \text{цифр}}) = \dfrac{2}{3}(10 + 10^2 + \ldots + 10^n - n)$.

820. 1) $x_k - x_{k-1} = a(x_{k-1} - x_{k-2}) = a^2(x_{k-2} - x_{k-3}) = \ldots = a^{k-2}(x_2 - x_1)$, т. е.

$$x_k - x_{k-1} = a^{k-2}(x_2 - x_1). \tag{1}$$

Полагая в (1) $k = 2, 3, \ldots, n$ и складывая соответствующие равенства, получаем $x_n - x_1 = (x_2 - x_1)(1 + a + a^2 + \ldots + a^{n-2}) = ((a-1)x_1 + b)\dfrac{a^{n-1} - 1}{a - 1}$, если $a \neq 1$. 2) $S_n = x_1 + a(x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1}) + (n-1)b = x_1 + a(S_n - x_n) + (n-1)b$. **821.** Если $z_n = x_n - x_{n-1}$, то $x_{n+1} - x_n = x_n - x_{n-1} + 1$, т. е. $z_{n+1} = z_n + 1$, откуда

$$z_n = z_2 + n - 2. \qquad (1)$$

Используя (1) и равенство $x_n = (x_n - x_{n-1}) + (x_{n-1} - x_{n-2}) + \ldots + (x_2 - x_1) + x_1$, получаем $x_n = z_n + z_{n-1} + \ldots + z_2 + x_1 = (n-1)z_2 + (n-2) + (n-3) + \ldots + 2 + 1 + x_1 = (n-1)(x_2 - x_1) + x_1 + \dfrac{(n-1)(n-2)}{2}$. **822.** Из условий задачи следует, что $|a_n| = 1$ при любом n. Кроме того, $a_5 = a_1a_2 = 1$, $a_6 = a_2a_3 = 1$, $a_7 = a_3a_4 = -1$, $a_8 = a_4a_5 = -1$. Докажем, что

$$a_n = a_{n-15}, \ n \geqslant 20. \qquad (1)$$

Используя формулу $a_k = a_{k-4}a_{k-3}$ $(k \in N)$, получаем $a_n = a_{n-3}a_{n-4} = a_{n-6}a_{n-7}a_{n-7}a_{n-8} = a_{n-6}a_{n-8} = a_{n-9}a_{n-10}a_{n-11}a_{n-12} = a_{n-12}a_{n-13} \times a_{n-10}a_{n-11}a_{n-12} = a_{n-10}a_{n-11}a_{n-13} = a_{n-13}a_{n-14}a_{n-11}a_{n-13} = a_{n-11} \times a_{n-14} = a_{n-14}a_{n-15}a_{n-14} = a_{n-15}$, так как $a_k^2 = 1$ $(k \in N)$. Полагая в (1) $n = 2000$ и учитывая, что $2000 = 15 \cdot 133 + 5$, получим $a_{2000} = a_5 = 1$. **823.** Исходное равенство запишем в виде

$$x_n - \alpha x_{n-1} = \beta(x_{n-1} - \alpha x_{n-2}) \qquad (1)$$

и обозначим $y = x_k - \alpha x_{k-1}$. Тогда получим $y_n = \beta y_{n-1}$, откуда $y_n = \beta^{n-2}y_2$,

$$x_n = \alpha x_{n-1} + \beta^{n-2}y_2. \qquad (2)$$

Если $z_n = \dfrac{x_n}{\beta^{n-1}}$, то равенство (2) примет вид $z_n = \dfrac{\alpha}{\beta} z_{n-1} + \dfrac{y_2}{\beta}$. Используя результат задачи 820, получаем $z_n = \left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^{n-1} z_1 + \dfrac{z_2}{\beta} \cdot \dfrac{\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^{n-1} - 1}{\dfrac{\alpha}{\beta} - 1}$. Остаётся выразить z_n через x_n, z_1 и y_2 через x_1 и x_2. **824.** Если s — расстояние от A до B, u — собственная скорость катера, v — скорость течения реки, то $\dfrac{s}{u+v} = a$, $\dfrac{s}{u-v} = b$, откуда $\dfrac{u}{s} + \dfrac{v}{s} = \dfrac{1}{a}$, $\dfrac{u}{s} - \dfrac{v}{s} = \dfrac{1}{b}$. Искомое время равно $\dfrac{s}{v}$.
825. Введём обозначения s км — расстояние от A до B; u, v, w км/ч — скорости пешехода, велосипедиста, мотоциклиста соответственно; t ч — время от начала движения мотоциклиста, через которое все трое оказались на одинаковом расстоянии от пункта A. По первому условию задачи должно выполняться равенство

$$wt = v(t + 0{,}5) = u(t + 2{,}5), \qquad (1)$$

а по второму условию — равенство

$$\frac{s}{u} - \frac{s}{w} = 3{,}5. \qquad (2)$$

В задаче требуется найти время $T = \frac{s}{u} - \frac{s}{v} - 2$. Из равенств (1) следует, что

$$\frac{s}{wt} = \frac{s}{v\,(t + 0{,}5)} = \frac{s}{u\,(t + 2{,}5)}. \qquad (3)$$

Введём обозначения: $\frac{s}{u} = x$, $\frac{s}{v} = y$, $\frac{s}{w} = z$. Тогда система уравнений (2), (3) примет вид

$$\begin{cases} x - z = 3{,}5, \\ \frac{z}{t} = \frac{y}{t + 0{,}5} = \frac{x}{t + 2{,}5}. \end{cases} \qquad (4)$$

Из уравнений $x - z = 3{,}5$, $\frac{z}{t} = \frac{x}{t + 2{,}5}$ получаем $x = \frac{7}{5}(t + 2{,}5)$. Из уравнения $\frac{y}{t + 0{,}5} = \frac{x}{t + 2{,}5}$ получаем $y = \frac{7}{5}(t + 0{,}5)$, поэтому $x - y = \frac{14}{5}$, $T = \frac{14}{5} - 2$, $T = \frac{4}{5}$ ч, т. е. $T = 48$ мин. **826.** Если x и y — масса меди и масса цинка в сплаве, то $\begin{cases} x - y = 640, \\ x + y - \frac{6}{7}x - \frac{3}{5}y = 200. \end{cases}$ Отсюда найдём массу сплава $x + y$.

827. Если v — скорость пешехода, s — путь AB, x — время от начала движения до встречи велосипедиста и пешехода, то $xv + x3v = s$, т. е. $\frac{s}{v} = 4x$, $\frac{s}{v} - \frac{2(s - xv)}{3v} = 2$. Отсюда найдём искомое время x. **828.** *1-й способ.* При движении пловца как по течению реки, так и против течения его собственная скорость равна скорости пловца в стоячей воде. Поэтому время, необходимое пловцу для того, чтобы после поворота догнать лодку, равно времени, в течение которого пловец с момента встречи плыл против течения, т. е. равно $2m$ мин. За это время лодка прошла путь s м. Поэтому скорость течения реки, равная скорости пустой лодки, есть $\frac{s}{2m}$ м/мин. *2-й способ.* Если x — скорость течения реки (скорость лодки), v — скорость пловца в стоячей воде, то $\frac{s - mx}{x} = \frac{s + m(v - x)}{v + x}$. Относительно воды пловец проплыл после встречи с лодкой такое же расстояние, как и после поворота до момента, когда он догнал лодку. Поэтому от момента встречи с лодкой до момента, когда пловец догнал лодку, прошло $2t$ мин. За это время лодка прошла s м, поэтому скорость течения реки равна $\frac{s}{2t}$ м/мин.

829. Пусть x км — расстояние, которое прошёл пешеход по равнине, y км — расстояние, которое прошёл пешеход в гору, z км — расстояние, которое прошёл под гору пешеход на пути от A до B. Тогда $y + z = 11{,}5 - x$. На путь от A до B и обратно пешеход затратил $\frac{2x}{4} + \frac{y + z}{3} + \frac{y + z}{5} = 6$, т. е. 6 ч, поэтому $\frac{x}{2} + \frac{11{,}5 - x}{3} + \frac{11{,}5 - x}{6} = 6$, откуда

$x = 4$ км. **830.** Если x, y и z — скорости первого пешехода, второго пешехода и туриста соответственно, то $z = 2{,}5y$, $x \cdot \frac{1}{3} = z \cdot \frac{1}{4} = \frac{2{,}5y}{4}$, откуда найдём $\frac{x}{y}$. **831.** Пусть s — путь AB, x и y — скорости первого и второго пешеходов соответственно, C — место встречи пешеходов. Тогда $AC = \frac{s}{2} + \frac{1}{2} = \frac{s+1}{2}$, $BC = \frac{s-1}{2}$, $\frac{s+1}{2x} = \frac{s-1}{2y}$, откуда

$$\frac{s+1}{s-1} = \frac{x}{y}. \qquad (1)$$

Кроме того, $\frac{s-1}{2x} = \frac{3}{4}$, $\frac{s+1}{2y} = \frac{4}{3}$, откуда

$$\frac{16}{9} \cdot \frac{s-1}{s+1} = \frac{x}{y}. \qquad (2)$$

Из (1) и (2) найдём s. **832.** Если v — скорость пешехода на подъёме, x — путь AB, то $\begin{cases} \frac{x}{v} + \frac{s-x}{v+a} = t, \\ \frac{s-x}{v} + \frac{x}{v+a} = \frac{t}{2}. \end{cases}$ Сложив уравнения этой системы, получим уравнение, которое можно записать в следующем виде: $3tv^2 + (3at - 4s)v - 2sa = 0$. **833.** Если u, v, w — скорости первого, второго и третьего велосипедистов соответственно, τ — время от начала движения первого велосипедиста до того момента, когда его догнал третий велосипедист, то $w = \frac{2}{3}v$, $u\tau = w(\tau - 1) = \frac{3}{2}v(\tau - 1)$, $u(\tau + 2) = v(\tau - 1)$, откуда следует, что $\frac{\tau}{\tau + 2} = \frac{3(\tau - 1)}{2(\tau + 1)}$, $\tau = 2$. Искомая величина $\frac{u}{w} = \frac{\tau - 1}{\tau} = \frac{1}{2}$. **834.** Если V — объём раствора в колбе, x — процент соли, содержащейся в растворе, то $\dfrac{V \cdot \frac{x}{100}}{V - \frac{V}{10}} = \frac{x+3}{100}$, откуда $x = 27\%$. **835.** Если x — количество кубических метров древесины, которые должна была заготавливать бригада по плану, t — число рабочих дней по плану, то $\begin{cases} xt = 216, \\ 3x + (x+8)(t-4) = 232, \end{cases}$ откуда найдём x. **836.** Если v — скорость поезда по расписанию, то $\frac{60}{v} + \frac{1}{12} + \frac{60}{v+10} = \frac{120}{v}$, откуда найдём v. **837.** Пусть s — расстояние от A до B, t_0 и t_1 — время (в часах) прохождения пути AB соответственно автобусом и катером, t_2 — время, за которое катер проходит путь от B до A. Тогда $\begin{cases} \frac{5}{9}t_0 = t_1 + \frac{4}{9}t_2, \\ \frac{9}{8}t_0 = t_1 + t_2 + \frac{7}{8}t_1, \\ t_0 = t_1 + \frac{4}{15}. \end{cases}$ Из этой системы найдём $t_0 = \frac{2}{5}$ ч, $t_1 = \frac{2}{15}$ ч, $t_2 = \frac{1}{5}$ ч.

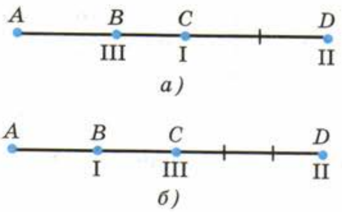


Рис. 78

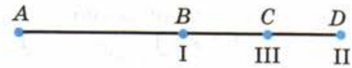


Рис. 79

Автобус прибывает в пункт A, выполнив чётное число рейсов (m от A до B и m рейсов от B до A) и затрачивает при этом время $2mt_0$. Возвращаясь в пункт A, катер также делает чётное число $2n$ рейсов и затрачивает время $nt_1 + nt_2$. Автобус и катер одновременно могут оказаться в пункте A только в том случае, когда найдутся натуральные числа m и n, такие, что $2mt_0 = n(t_1 + t_2)$, т. е. $\frac{4}{5}m = \frac{1}{3}n$, или $n = \frac{12}{5}m$. Наименьшее возможное целое $n = 12$, и тогда $m = 5$, а одновременно автобус и катер попадут в пункт A первый раз, затратив время $2mt_0 = n(t_0 + t_1) = 4$ ч. **838.** Пусть v — скорость k-го автомобиля ($k = 1, 2, 3$) в км/ч. Так как на равном расстоянии от первого и второго третий автомобиль оказался позже, чем в первом положении (ближе к первому), то $v_1 < v_2 < v_3$. Возможны два варианта первого расположения автомобилей (через час после старта первого), указанные на рисунке 78. На равном расстоянии от первых двух третий автомобиль может оказаться лишь в одном положении (рис. 79). Обозначим через x искомое время (в часах). Тогда для варианта, указанного на рисунке 78, *а*, имеем

$$v_2(x + 1) - v_3 = 3(v_1(x + 1) - v_3), \qquad (1)$$

а для ситуации на рисунке 78, *б* получаем

$$v_2(x + 1) - v_3 = 3(v_3 - v_1(x + 1)). \qquad (2)$$

Из рисунка 79 следует, что

$$(v_1 + v_2)\left(x + \frac{4}{3}\right) = \frac{8}{3}v_3. \qquad (3)$$

Кроме того, по условиям задачи

$$\frac{7}{4}v_1 = \left(\frac{7}{4} - x\right)v_3. \qquad (4)$$

Задача сводится к решению систем (1), (3), (4) и (2), (3), (4). Рассмотрим первую из этих систем, записав её в виде

$$\begin{cases} 2v_3 = (x + 1)(3v_1 - v_2), & (5) \\ 8v_3 = (3x + 4)(v_1 + v_2), & (6) \\ (7 - 4x)v_3 = 7v_1. & (7) \end{cases}$$

Разделив почленно уравнение (6) на уравнение (5), получаем $4(x + 1)(3v_1 - v_2) = (3x + 4)(v_1 + v_2)$ или

$$v_1(9x + 8) = (7x + 8)v_2. \qquad (8)$$

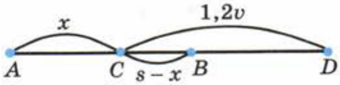


Рис. **80**

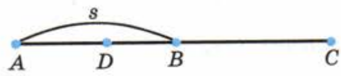


Рис. **81**

Аналогично, разделив (5) на (7), преобразуем полученное уравнение к виду

$$(12x^2 - 9x - 7)\,v_1 = (4x^2 - 3x - 7)\,v_2. \qquad (9)$$

Наконец, разделив (9) на (8), получим уравнение, которое можно записать так: $24x^2 + 14x - 17 = 0$, откуда $x = \dfrac{\sqrt{457} - 7}{24}$. Аналогично из системы (2), (3), (4) найдём $x = 1$. **839.** Пусть C — место встречи велосипедиста с первым пешеходом (рис. 80), $AC = x$, $AB = s$, D — место, где велосипедист догнал второго пешехода, v — скорость велосипедиста, w — скорость каждого из пешеходов. Тогда $BC = s - x$, $CD = 1{,}2v$,

$$\frac{s}{v} = 0{,}5, \qquad (1)$$

а искомое время $t = \dfrac{x}{v}$. Из условий задачи следует, что

$$\frac{x}{v} = \frac{s - x}{w}, \qquad (2)$$

$$\frac{x}{v} + 1{,}2 = \frac{1{,}2v + x - s}{w}. \qquad (3)$$

Из уравнений (2) и (1) получаем

$$\frac{t}{0{,}5 - t} = \frac{v}{w}, \qquad (4)$$

а из уравнений (3) и (1) находим

$$t + 1{,}2 = \frac{(1{,}2 + t - 0{,}5)\,v}{w}. \qquad (5)$$

Наконец, из (4) и (5) следует, что $\dfrac{t + 1{,}2}{t + 0{,}7} = \dfrac{t}{0{,}5 - t}$, откуда $t = 0{,}3$.

840. Пусть C — место, где мотоциклист догнал велосипедиста (рис. 81), v и w — скорости мотоциклиста и велосипедиста соответственно, D — место, где оказался бы велосипедист в случае, когда мотоциклист выезжает из A и прибывает в B. Тогда $DB = b$, $BC = a$ и из условий задачи следует, что $\dfrac{s + a}{v} = \dfrac{a}{w}$, $\dfrac{s}{v} = \dfrac{s - b}{w}$, откуда получаем $\dfrac{s + a}{a} = \dfrac{s}{s - b}$. **841.** Если u и v — скорости автобуса и автомобиля соответственно, $AB = s$, то

$$\begin{cases} 42\,(u + v) = s, & (1)\\ 154\,(v - u) = s. & (2)\end{cases}$$

Пусть t и τ — время, которое затрачивают на путь s автобус и автомобиль соответственно. Тогда $t = \frac{s}{u}$, $\tau = \frac{s}{v}$ и из системы (1), (2) следует, что

$$\begin{cases} \frac{1}{t} + \frac{1}{\tau} = \frac{1}{42}, \\ \frac{1}{\tau} - \frac{1}{t} = \frac{1}{154}, \end{cases}$$

откуда находим $\tau = 66$, $t = \frac{231}{2}$ мин. В пункт A автобус и автомобиль прибывают, сделав $2m$ и $2n + 1$ рейсов соответственно (рейс — поездка из одного пункта в другой). Участники движения окажутся одновременно в пункте A, если $2mt = (2n + 1)\tau$, где $m \in N$, $n \in N$. Следовательно, $m = \frac{2(2n+1)}{7}$. Так как 2 и 7 взаимно простые числа, то число $2n + 1$ должно делиться на 7. При этом наименьшее n равно 3, и тогда $m = 2$. Искомое время $2mt = 462$ мин. **842.** Пусть $AB = s_1$, $BC = s_2$, x — собственная скорость буксира на участке AB, v — скорость течения реки. По условиям задачи составляем систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{s_1}{v + x} + \dfrac{s_2}{v + \frac{5}{3}x} = 4, & (1) \\ \dfrac{s_1 + s_2}{2x - v} = 4, & (2) \\ \dfrac{s_2}{\frac{5}{3}x - v} = 3. & (3) \end{cases}$$

Обозначим $\frac{v}{s_1} = y_1$, $\frac{x}{s_1} = z_1$, $\frac{v}{s_2} = y_2$, $\frac{x}{s_2} = z_2$.

Тогда система (1) — (3) примет вид

$$\begin{cases} \dfrac{1}{y_1 + z_1} + \dfrac{1}{y_2 + \frac{5}{3}z_2} = 4, & (4) \\ \dfrac{1}{2z_1 - y_1} + \dfrac{1}{2z_2 - y_2} = 4, & (5) \\ \dfrac{1}{\frac{5}{3}z_2 - y_2} = 3, & (6) \end{cases}$$

где

$$\frac{y_1}{z_1} = \frac{y_2}{z_2}. \qquad (7)$$

В задаче требуется найти величину $t=\dfrac{s_1}{v+x}=\dfrac{1}{y_1+z_1}$. Из уравнения (6) следует, что

$$z_2=\frac{1+3y_2}{5}, \tag{8}$$

и поэтому уравнения (7), (4), (5) можно с помощью равенства (8) записать в виде

$$\frac{y_1}{z_1}=\frac{5y_2}{1+3y_2}, \tag{9}$$

$$2z_1-y_1=\frac{2+y_2}{1+3y_2}, \tag{10}$$

$$y_1+z_1=\frac{6y_2+1}{24y_2+1}. \tag{11}$$

Разделив (10) на (11) почленно и воспользовавшись равенством (9), получим

$$\frac{2-\dfrac{y_1}{z_1}}{\dfrac{y_1}{z_1}+1}=\frac{2+y_2}{1+8y_2}=\frac{(2+y_2)(24y_2+1)}{(3+y_2)(6y_2+1)},$$

откуда $84y_2^2+5y_2-1=0$, $y_2=\dfrac{1}{12}$, а из (11) следует, что $y_1+z_1=\dfrac{1}{2}$, и поэтому $t=2$ ч. **843.** Пусть v_1 — скорость парохода в стоячей воде, v_2 — скорость катера, v — скорость течения реки, s — расстояние от A до B, t — продолжительность рабочего дня. Обозначим

$$\frac{s}{v_1-v}=x, \tag{1}$$

$$\frac{s}{v_1+v}=y, \tag{2}$$

$$\frac{s}{v_2-v}=z, \tag{3}$$

$$\frac{s}{v_2+v}=u. \tag{4}$$

Тогда

$$t=9(x+y)=5(z+x). \tag{5}$$

По условиям задачи

$$y+\frac{x}{6}=\frac{1}{3}, \tag{6}$$

$$\frac{5}{6}u=\frac{1}{3}. \tag{7}$$

Из (5), (6) и (7) находим $u=\dfrac{2}{5}$,

$$\begin{cases} x+y=\dfrac{t}{9}, & (8)\\ x+6y=2, & (9)\\ z+\dfrac{2}{5}=\dfrac{t}{5}. & (10)\end{cases}$$

Получена система (8) — (10) трёх уравнений с четырьмя неизвестными x, y, z, t. Ещё одно уравнение следует из (1) — (4): в силу (1) — (4) эти неизвестные связаны уравнением $\frac{1}{y}-\frac{1}{x}=\frac{1}{u}-\frac{1}{z}$, или $\left(\text{если учесть, что } u=\frac{2}{5}\right)$ — уравнением

$$\frac{1}{y}-\frac{1}{x}=\frac{5}{2}-\frac{1}{z}. \tag{11}$$

Исключая из системы (8) — (11) x, y, z, получаем

$$\frac{45}{18-t}-\frac{15}{2(t-3)}=\frac{5}{2}-\frac{5}{t-2}. \tag{12}$$

Уравнение (12) можно преобразовать к виду $t^3-4t^2-12t=0$, откуда $t_1=0$, $t_2=-2$, $t_3=6$. Так как $t>0$, то $t=6$.

Предметный указатель

ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава V. Случайные события

Глава VI. Случайные величины

Глава VII. Множества. Логика

Учебное издание

Алимов Шавкат Арифджанович
Колягин Юрий Михайлович
Сидоров Юрий Викторович
Ткачёва Мария Владимировна
Фёдорова Надежда Евгеньевна
Шабунин Михаил Иванович

АЛГЕБРА

9 класс

Учебник для общеобразовательных учреждений

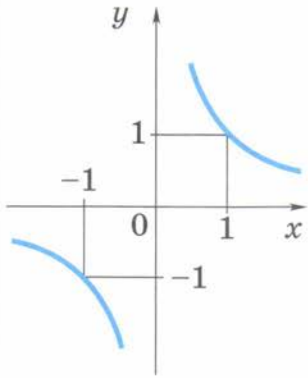
Зав. редакцией *Т. А. Бурмистрова*
Редактор *Л. Н. Белоновская, Н. Н. Сорокина*
Младший редактор *Е. А. Андреенкова*
Художники *В. А. Андрианов, И. В. Гущин, В. В. Костин*
Художественный редактор *О. П. Богомолова*
Технический редактор и верстальщик *Н. В. Лукина*
Корректоры *И. П. Ткаченко, Л. С. Александрова, С. В. Николаева*

Налоговая льгота — Общероссийский классификатор продукции ОК 005-93—953000. Изд. лиц. Серия ИД № 05824 от 12.09.01. Подписано в печать 18.04.12. Формат $60 \times 90^1/_{16}$. Бумага офсетная. Гарнитура Школьная. Печать офсетная. Уч.-изд. л. 14,41 + 0,47 форз. Тираж 25 000 экз. Заказ № 32825.

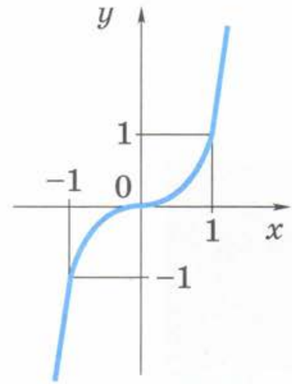
Открытое акционерное общество «Издательство «Просвещение». 127521, Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Отпечатано в ОАО «Саратовский полиграфкомбинат». 410004, г. Саратов, ул. Чернышевского, 59. www.sarpk.ru

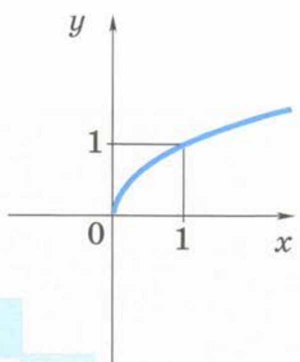
Графики функций



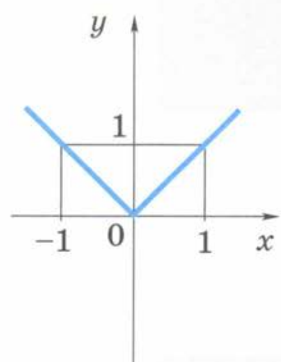
$$y = \frac{1}{x}$$



$$y = x^3$$



$$y = \sqrt{x}$$



$$y = |x|$$

Модуль числа a

$$|a| = \begin{cases} a, \textit{если } a \geqslant 0 \\ -a, \textit{если } a < 0 \end{cases}$$

Формулы сокращенного умножения

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$